

Magdalena Hałucha, Damian Melniczuk  
(ankh lub czubek)@student.pwr.wroc.pl

# Fizyka AIII

18 lutego 2008

## Spis treści

<b>1. Elektrodynamika II</b>	2
1.1. Płaska fala elektromagnetyczna (wyprowadzenie)	2
1.2. Interferencja promieniowania z dwóch źródeł punktowych	3
1.3. Prawa zachowania w elektrodynamice	5
1.4. Oddziaływanie promieniowania z izolatorem	6
<b>2. Elementy teorii kwantowej</b>	8
2.1. Załamanie się fizyki klasycznej	8
Promieniowanie ciała doskonale czarnego	8
Efekt fotoelektryczny	8
Linijowe widmo promieniowania	9
Dualizm korpuskularno-falowy	9
2.2. Model atomu Bohra	10
2.3. Elektron w nieskończonej studni potencjału (wyprowadzenie)	11
<b>3. Elementy fizyki jądrowej</b>	12
3.1. Energia wiązania (definicja). Oddziaływanie nukleon-nukleon. Ciężkie jądra atomowe. Wykres zależności energii wiązania od liczby masowej.	12
3.2. Rozpad $\alpha$ . Rozpad $\beta$ . Powstanie plutonu 239	13
3.3. Prawo rozpadu promieniotwórczego (wyprowadzenie)	15
3.4. Rozszczepienie jąder atomowych. Reakcje łańcuchowe. Reaktory jądrowe. Synteza jądrowa	15
<b>4. Elementy astrofizyki i fizyki cząstek elementarnych</b>	18
4.1. Ciśnienie termiczne i cykl wodorowy. Ciśnienie kwantowo-mechaniczne	18
4.2. Biały karzeł (analiza energii - schemat)	18
4.3. Gwiazda neutronowa (analiza energii - schemat)	19
4.4. Czarna dziura	20
4.5. Rozszerzający się Wszechświat	21
4.6. Kwarki. Materia i oddziaływanie	21
<b>5. Przestrzenie zakrzywione (elementy ogólnej teorii względności)</b>	22
5.1. Zakrzywione przestrzenie dwuwymiarowe. Zakrzywienie przestrzeni trójwymiarowej według Einsteina	22
5.2. Koncepcja linii prostej w czasoprzestrzeni. Grawitacja i zasada równoważności	23
5.3. Rytm zegarów w polu grawitacyjnym. Zakrzywienie czasoprzestrzeni	23

5.4. Einsteińska teoria ciężenia; efekty fizyczne . . . . .	25
<b>6. Elementy mechaniki statystycznej . . . . .</b>	<b>26</b>
6.1. Związek $U$ i $F$ z $\ln Z$ (wyprowadzenie) . . . . .	26
6.2. Paramagnetyzm, prawo Curie (wyprowadzenie) . . . . .	26
<b>7. Elementy teorii transportu w rozrzedzonym gazie . . . . .</b>	<b>28</b>
7.1. Lepkość i transport pędu (schemat wyprowadzenia) . . . . .	28

## 1. Elektrodynamika II

### 1.1. Płaska fala elektromagnetyczna (wyprowadzenie)

Zmiany indukcji pola magnetycznego  $\rightarrow$  wirowe pole elektryczne wokół tego punktu (natężenie jako funkcja szybkości zmian indukcji; brak uwarunkowania istnieniem przewodnika/ładunku)

Maxwell: proces odwrotny (teoria elektromagnetyzmu)  $\rightarrow$  zmiany natężenia pola elektrycznego  $\rightarrow$  wirowe pole magnetyczne (indukcja jest funkcją szybkości zmian natężenia).

punkt A  $\rightarrow$  zmienne pole elektryczne E  $\rightarrow$  wirowe pole magnetyczne B  $\rightarrow$  zmiany magnetyczne  $\rightarrow$  zmienne wirowe pole elektryczne  $\rightarrow$  pole magnetyczne B  $\rightarrow$  etc.

Rozchodzące się z punktu A zaburzenie elektromagnetyczne w postaci wzajemnie indukujących się zmian wektora  $\vec{E} \perp \vec{B}$  (prostopadłe  $\vec{E} \perp \vec{B} \perp \vec{V}$ ) - fala elektromagnetyczna.

Równania Maxwella:

$$\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi k_0 \rho, \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0, \operatorname{rot} \vec{B} = \frac{4\pi k_0}{c^2} \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (\rho = 0, \vec{j} = 0 - \text{próżnia})$$

Równanie falowe:

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{E}) = \operatorname{rot}\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}(\operatorname{rot} \vec{B}) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{A}) = \operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{A}) - \Delta \vec{A}$$

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

Szczególne rozwiązanie równań Maxwella:

a)

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = (0, E_y(x, t), 0) \Rightarrow E_y(x, t) = A \cos(kx - \omega t) - \text{fala płaska} \rightarrow (1)$$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}$$

$$-Ak^2 \cos(kx - \omega t) + \frac{1}{c^2} \omega^2 A \cos(kx - \omega t) = 0$$

$$\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 = 0$$

$$\omega = kc \Rightarrow Ey(x, t) = A \cos(k(x - ct))$$

$\omega = \omega(k)$  - relacja dyspersji

b)

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \text{rot} \vec{E} = \hat{k} \frac{\partial Ey(x)}{\partial x}$$

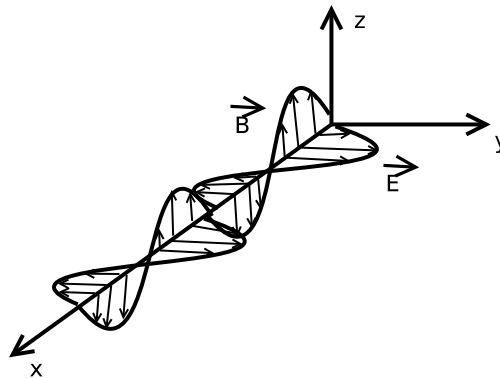
$$(0, 0, \frac{\partial Ey}{\partial x}) = (0, 0, -\frac{\partial Bz}{\partial t}), \vec{B}: \text{tylko składowa "z"} \text{ (składowe x,y=const)}$$

$$\frac{\partial Ey}{\partial x} = -\frac{\partial Bz}{\partial t}$$

$$A k \sin(kx - \omega t) = \frac{\partial Bz}{\partial t}$$

$$Bz = -A k \cos(kx - \omega t) \left(-\frac{1}{\omega}\right) = A \frac{k}{\omega} \cos(kx - \omega t)$$

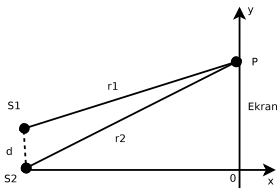
$$Bz(x, t) = Ey(x, t) \frac{1}{c}$$



Rysunek 1.

$$\vec{E} \perp \vec{B} \perp \hat{i}, |\vec{B}| = \frac{1}{c} |\vec{E}|, v = c$$

## 1.2. Interferencja promieniowania z dwóch źródeł punktowych



Rysunek 2. Schemat oscylujących dipoli

Dwa dipole drgają po osi z  $\Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \vec{E}_1, \vec{E}_2 \perp$  do XY

$$E = k_0 \frac{q}{c^2} \frac{1}{r} \sin\varphi \cdot a \left( t - \frac{r}{c} \right)$$

$E' = E_1 + E_2$  - jedna prosta, bez wektorów

Promieniowanie dipola:

$$|E| = k_0 \frac{q}{c^2} \frac{1}{r} \sin\varphi \cdot z_0 \omega^2 \cos(\omega t - kr)$$

$$z = z_0 \cos\omega t$$

$$a = \frac{d^2 z}{dt^2}$$

$$E' = E_0 \cos(\omega t - kr_1) + E_0 \cos(\omega t - kr_2), \quad E_0 = k_0 \frac{q}{c^2} \frac{1}{r} \sin\varphi \cdot z_0 \omega^2$$

$$E' = E_0 2 \cos \frac{2\omega t - k(r_1 + r_2)}{2} \cos \frac{k(r_1 + r_2)}{2}$$

$$E' = 2E_0 \cos \frac{k(r_1 + r_2)}{2} \cos \left( \omega t - \frac{k(r_1 + r_2)}{2} \right)$$

$$2E_0 \cos \frac{k(r_1 + r_2)}{2} - \text{amplituda}$$

Natężenie fali  $\sim A^2, I = \bar{s}$  (średnie po czasie),  $\bar{s} = \epsilon_0 c^2 \vec{E} \times \vec{B} \Rightarrow s = \epsilon_0 c E^2$

$$I = 4I_0 \cos^2 \frac{k(r_2 - r_1)}{2} I_0 - \text{natężenie pojedynczej fali}$$

$$\cos^2 \varphi = \frac{1}{2} (1 + \cos 2\varphi) \Rightarrow I = 4I_0 \frac{1}{2} (1 + \cos k(r_2 - r_1))$$

Promienie jednocześnie wpadają do oka i odległość od ekranu jest dostatecznie duża mamy:

$$r_2 - r_1 = d \sin\Theta$$

$$I = 2I_0 (1 + \cos(kd \sin\Theta))$$

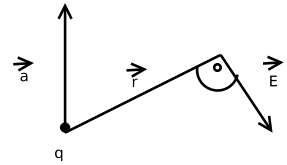
Położenie maksimumów:

$$I_{max} = 4I_0, \text{ ponieważ } (1 + \cos(x)) = 2(\text{max})$$

$$\cos(kd \sin\Theta) = 1, \quad kd \sin\Theta = 2\pi n, \quad n = 0, \pm 1, \dots$$

$$\sin\Theta = \frac{2\pi n}{kd}, \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\sin\Theta = \frac{\lambda n}{d}$$



Rysunek 3.

### 1.3. Prawa zachowania w elektrodynamice

a) Zachowania ładunku:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \vec{j} = 0, \vec{j} - \text{wektor gęstości prądu}, \rho - \text{gęstość ładunku}$$

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_V \text{div} \vec{j} dV = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV = - \oint_S \vec{j} d\vec{A}, \text{twierdzenie Gaussa}$$

$$\frac{\partial Q_{tot}}{\partial t} = - \oint_S \vec{j} d\vec{A}, \text{wyływ} \vec{j} d\vec{A} = \frac{dq}{dt}$$

Jeśli przez obszar o objętości V ograniczony powierzchnią S nie wypływa prąd to zachowany jest całkowity ładunek elektryczny.

b) Zachowania energii:

$$-\text{rot} \vec{E} \cdot \vec{B} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{B} = \frac{\partial}{\partial t} (\vec{B} \cdot \vec{B}) \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \frac{\partial B^2}{\partial t}$$

$$\text{rot} \vec{B} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \vec{j} \cdot \vec{E} + \frac{1}{2} \frac{1}{c^2} \frac{\partial E^2}{\partial t}$$

$$\text{rot} \vec{B} \cdot \vec{E} - \text{rot} \vec{E} \cdot \vec{B} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (B^2 + \frac{E^2}{c^2}) + \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \vec{j} \cdot \vec{E}$$

$$-\text{div}(\epsilon_0 c^2 \vec{E} \times \vec{B}) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_0 c^2 B^2 + \epsilon_0 E^2) + \vec{j} \cdot \vec{E}$$

$$(\epsilon_0 c^2 \vec{E} \times \vec{B}) = \vec{s}: \text{wektor Poytinga: wektor gęstości strumienia energii}$$

Sens  $\vec{j} \cdot \vec{E}$

$$\vec{j} \cdot \vec{E} = \rho \vec{v} \cdot \vec{E} = \vec{v} \cdot (\rho \vec{E}) = \frac{\partial}{\partial t} U_{mech}$$

$$\rho \vec{E} = \vec{f} - \text{gęstość siły}, U_{mech}: \text{gęstość energii mechanicznej}, \frac{dE_k}{dt} = \vec{v} \cdot \vec{F}$$

$$\vec{v} \cdot (\rho \vec{E}): \text{gęstość mocy}$$

$$U_{em} := \frac{1}{2} \epsilon_0 (E^2 + (cB)^2)$$

$$\text{div} \vec{s} = \frac{\partial}{\partial t} U_{em} + \frac{\partial}{\partial t} U_{mech} = \frac{\partial}{\partial t} (U_{em} + U_{mech}) = \frac{\partial U}{\partial t}$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \text{div} \vec{s} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V \rightarrow \infty} U dV + \int_V \text{div} \vec{s} dV = 0$$

$$\frac{\partial U_{tot}}{\partial t} = - \int_{S \rightarrow \infty} \vec{s} \cdot d\vec{A}$$

przepływ energii przez powierzchnię (energia się zmienia, więc musi przybywać lub ubywać)

$$\frac{\partial U_{tot}}{\partial t} = 0 \rightarrow \text{układ izolowany}$$

dla skończonej objętości:

gdy  $s \rightarrow \infty$ , to  $\vec{s} \rightarrow 0$ , a więc  $U_{em} + U_{mech} = const$ ;  $dU = \vec{s} \cdot d\vec{A}dt$

$$dU_{tot} + \int_S \vec{s} \cdot d\vec{A}dt = 0$$

przepływ energii przez powierzchnię opisaną wektorem  $d\vec{A}$  w czasie  $dt$

c) Zachowania pędu:

$$V \rightarrow \infty, \frac{\partial}{\partial t} \int_V \left( \frac{s_\alpha}{c^2} + \sum_i p_{i\alpha} \right) dV = - \oint_S T_{\alpha\beta} dA_\beta$$

$T_{\alpha\beta}$ : tensor naprężeń Maxwella,

$\frac{s_\alpha}{c^2}$ : gęstość wektora pędu pola elektro-magnetycznego,

$\sum_i p_{i\alpha}$ : pęd cząstek

dla skończonej objętości:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\text{całka pędu w objętości } V) = \int_S \overleftarrow{T} d\vec{A}$$

$$\frac{\partial p_i}{\partial t} = \int_S T_{ik} dA_k, [T_{ij}] = \frac{N}{m^2}$$

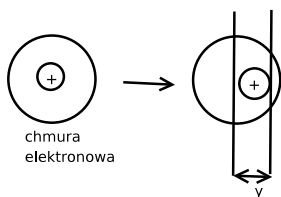
$T_{ij} = j$ : składowa siły działająca na powierzchni  $\perp$  do osi  $i$

$$\vec{F} = \int_S \overleftarrow{T} \cdot d\vec{A} - \frac{\partial}{\partial t} \int_V \frac{\vec{s}}{c^2} dV$$

#### 1.4. Oddziaływanie promieniowania z izolatorem

Izolator (np. gaz) pozwala fali przejść bez osłabienia, ale fala rozchodzi się w nim wolniej niż w próżni.

Zewnętrzne elektrony izolatora są luźno związane. Następnie pod wpływem zewnętrznego pola następuje przesunięcie; model:



Rysunek 4. Model chmury elektronowej

pojawia się  $F \sim y \rightarrow$  - chmura oscyluje ruchem harmonicznym

Siła działająca na chmurę:  $F = -m\omega_0^2 y$ ,  $\frac{\omega_0}{2\pi}$  - częstotliwość oscylacji. Padająca fala o natężeniu  $E$  uderza w chmurę elektronową i daje nam siłę wypadkową równą:

$$F_{wyp} = F - (-e)E$$

$m \frac{d^2 y}{dt^2} = -m\omega_0^2 y - eE$ ,  $E = E_0 \cos \omega(t - \frac{x}{c})$ :  $x$  - odległość od źródła

Oscylator z siłą wymuszającą:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\omega_0^2 y - \frac{eE_0}{m} \cos\omega(t - \frac{x}{c}) \text{ gdzie } \omega_0 - \text{ naturalna częstość oscylacji elektronu atomowego}$$

Rozwiązanie równania:

$$y = -\frac{eE_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos\omega(t - \frac{x}{c})$$

Dla zbioru atomów:

fala pada  $\rightarrow$  elektrony oscylują  $\rightarrow$  każdy promieniuje falę elektro-magnetyczną  $\rightarrow$  fala odbita i transmitowana (nie ma strat energii).

$E = E_0 \cos\omega t$ , bez przesunięcia, ponieważ na powierzchni płytki  $x=0$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{eE_0\omega}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \sin\omega t$$

$$\vec{j} = \rho\vec{v}, j = \frac{\rho e E_0 \omega}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \sin\omega t$$

1. Całkowite pole elektronów jest sumą pól od wszystkich ładunków.

2. Pole promieniowania pojedynczego ładunku jest proporcjonalne do przyspieszenia wziętego z opóźnieniem odpowiadającym  $v = c$  (pole na skutek ruchu wszystkich ładunków w płytce).

Pole wypromieniowane przez elektrony w płytce:

$$\Delta E = -\frac{2\pi}{c} k_0 j \Delta X, \text{ (znak minus: } j \text{ i jego pole promieniowania są przeciwnie skierowane)}$$

$$\Delta E = -\frac{2\pi}{c} k_0 \left( \frac{\rho e E_0 \omega}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \sin\omega t \right) \Delta x$$

$$\Delta E = \Delta E_0 \cos(\omega t - \frac{\pi}{2})$$

$$E' = E + \Delta E = E_0 \cos\Theta + \Delta E_0 \cos(\Theta - \frac{\pi}{2}): \text{ różnica faz } - \frac{\pi}{2}$$

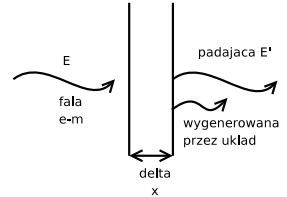
Czas dla fali padającej na przejście przez płytkę:

$$t = \frac{\Delta x}{c}, v = \frac{c}{n} \Rightarrow t' = n \frac{\Delta x}{c}, \Delta t = (n - 1) \frac{\Delta x}{c}$$

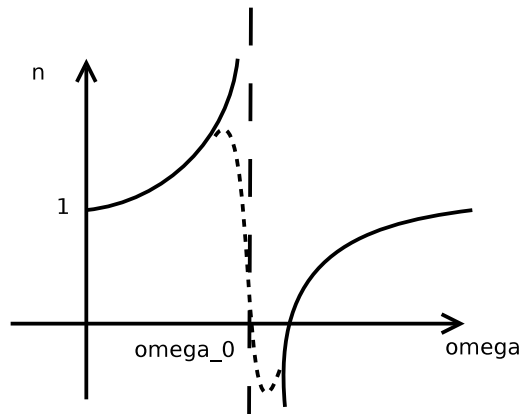
$$\phi = \frac{\Delta E_0}{E_0}, \phi = \omega \Delta t = \omega \left( (n - 1) \frac{\Delta x}{c} \right) = \frac{\Delta E_0}{E_0}$$

$$\Delta E_0 = E_0 \omega \left( (n - 1) \frac{\Delta x}{c} \right), E_0 \omega \left( (n - 1) \frac{\Delta x}{c} \right) = \frac{2\pi k_0 \rho e \omega}{cm(\omega_0^2 - \omega^2)} E_0 \Delta x$$

$$n = 1 + \frac{2\pi k_0 \rho e}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}: \text{ nie zależy od } \Delta x$$



Rysunek 5.



Rysunek 6.

## 2. Elementy teorii kwantowej

### 2.1. Załamanie się fizyki klasycznej

#### Promieniowanie ciała doskonale czarnego

W roku 1859 niemiecki fizyk Gustav Kirchhoff sformułował prawo promieniowania temperaturowego, które prowadziło do wniosku, że każde ciało doskonale czarne jest w równowadze termicznej z promieniowaniem cieplnym.

Próby wyjaśnienia rozkładu promieniowania ciała doskonale czarnego na gruncie termodynamiki klasycznej doprowadziły do sformułowania prawa Rayleigha-Jeansa, z którego wynikało, że ilość wypromieniowanej energii jest proporcjonalna do czwartej potęgi częstości promieniowania, a to oznaczało, że ciało powinno promieniować znacznie więcej energii w pasmie ultrafioletu niż w zakresie światła widzialnego i to niezależnie od temperatury.

W roku **1900 Max Planck** przedstawił wzór nazwany później rozkładem Planck'a który opisywał gęstość energii ciała doskonale czarnego w zależności od długości fali:

$$u(\lambda) = \frac{2\pi c^2 h}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1}$$

W uzasadnieniu Planck przyjął, że oscylatory wytwarzające promieniowanie cieplne mogą przyjmować tylko pewne wybrane stany energetyczne, a emitowane przez nie promieniowanie może być wysyłane tylko określonymi porcjami. W celu wyjaśnienia tej zależności Planck musiał wprowadzić nową stałą  $h$  nazwaną później stałą Planck'a

#### Efekt fotoelektryczny

Efekt fotoelektryczny, zjawisko fotoelektryczne – zjawisko fizyczne polegające na emisji elektronów z powierzchni przedmiotu (tzw. efekt zewnętrzny) lub na przeniesieniu nośników ładunku elektrycznego pomiędzy pasmami energetycznymi (tzw. efekt wewnętrzny), po naświetleniu jej promieniowaniem elektromagnetycznym (na przykład światłem widzialnym) o odpowiedniej częstotliwości, zależnej od rodzaju przedmiotu. Emitowane w ten sposób elektrony nazywa się czasem fotoelektronami. Energia kinetyczna fotoelektronów nie zależy od natężenia światła a jedynie od jego częstotliwości. Gdy oświetlanym ośrodkiem jest gaz mamy do czynienia z tzw. fotojonizacją.

Efekt fotoelektryczny badał Maxwell jednak jego wyniki nie zgadzały się z wynikami doświadczalnymi, wręcz były całkowicie odwrotne:

Maxwell: kiedy  $\omega > \omega_{graniczne}$  to nie istnieje efekt fotoelektryczny.

Doświadczenie: kiedy  $\omega < \omega_{graniczne}$  to nie istnieje efekt fotoelektryczny.

Maxwell: kiedy  $I < I_{graniczne}$  ( $I$ -natężenie) to nie istnieje efekt fotoelektryczny.

Doświadczenie: występowanie lub nie efektu fotoelektrycznego nie zależy od  $I$ .

Maxwell:  $v_e$  (prędkość elektronów) zależy od natężenia.

Doświadczenie:  $v_e$  nie zależy od natężenia.

## Liniowe widmo promieniowania

Mechanika klasyczna: atom wysyła promieniowanie o widmie ciągłym.

Doświadczenie: widmo jest liniowe  $\rightarrow$  widmo absorbcyjne też jest liniowe.

$$E_2 - E_1 = \hbar\omega \rightarrow \text{przejścia z jednej orbity na drugą} \rightarrow \text{linie widma}$$

Nazwy serii przejścia elektronu z  $n$ -tej orbity na daną:

5 - Pfunda

4 - Bracketa

3 - Paschena

2 - Balmera

1 - Lymana

$$\nu = R \left( \frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right) - \text{wzór Balmera, } n = 3, 4, 5, \dots$$

$$\nu = R \left( \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$

## Dualizm korpuskularno-falowy

Dualizm korpuskularno-falowy - cecha wielu obiektów fizycznych (np: światła czy elektronów) polegająca na tym, że w pewnych sytuacjach, zachowują się one jakby były cząstkami (korpuskułami), a w innych sytuacjach jakby były falami.

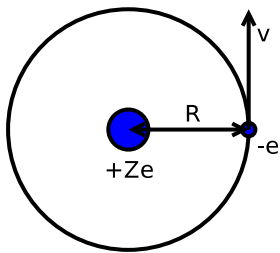
Wg mechaniki kwantowej właściwie całą materię charakteryzuje ten dualizm. Każdej cząstce, a nawet każdemu obiektowi makroskopowemu można przypisać charakterystyczną dla niego funkcję falową, wynikającą z probabilistycznej natury materii. Z drugiej strony każde oddziaływanie falowe można opisać w kategoriach cząstek.

Dualizm korpuskularno-falowy jest ściśle związany z falami de Broglie'a. Równanie:

$$p = \frac{h}{\lambda}$$

łączy wielkości falowe (długość fali  $\lambda$ ) z korpuskularnymi (pęd  $p$ ).

## 2.2. Model atomu Bohra



Rysunek 7. Model Bohra atomu wodoropodobnego

W roku 1913 Niels Bohr założył, że elektron może krążyć tylko po wybranych orbitach zwanych stabilnymi, oraz że krążąc po tych orbitach nie emituje promieniowania. Atom wydziela promieniowanie tylko gdy elektron przechodzi między orbitami. Bohr opracował tenże model atomu (rys. 15) opierając się na dwóch postulatach. Pierwszy mówił o tym, że moment pędu elektronu musi być całkowitą wartością  $\hbar$ :

$$mvR = n\hbar \quad (2)$$

Drugi postulat natomiast mówił o tym, że różnica energii elektronu na dwóch sąsiednich orbitach jest równa stałej Plancka pomnożonej przez częstotliwość fali promieniowania (rys. 8):

$$E_{n+1} - E_n = hf \text{ gdzie } n \in \{1, 2, 3\}$$

Współcześnie wiadomo, że orbity klasyczne nie są prawidłowym opisem - elektron należy opisywać za pomocą fali stojącej, oraz, że wartość momentu pędu nie równa się  $n\hbar$  lecz  $\sqrt{l(l+1)}\hbar$  co jest zawsze mniejsze od wartości podanej przez Bohra.

Z postulatu (2) wynika następujący wzór na promień  $n$ -tej orbity:

$$R_n = n \frac{\hbar}{mv} \quad (3)$$

Według modelu Bohra elektron krąży wokół jądra jako naładowany punkt materialny, przyciągany do jądra siłami elektrostatycznymi. Przyrównując siłę dośrodkową do siły elektrostatycznej otrzymujemy:

$$\frac{mv^2}{R_n} = \frac{k_0 Ze^2}{R_n^2}$$

a następnie:

$$mv^2 = \frac{k_0 Ze^2}{R_n} = -U \text{ (jest to energia potencjalna)} \quad (4)$$

$$v^2 = \frac{k_0 Ze^2}{mR_n} \quad (5)$$

Po podstawieniu (3) do (5) otrzymujemy:

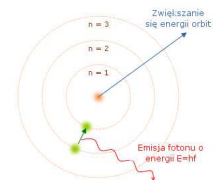
$$v^2 = \frac{k_0 Ze^2}{m \left( n \frac{\hbar}{mv} \right)}$$

następnie:

$$v = \frac{k_0 Ze^2}{n\hbar} \quad (6)$$

Poziom energetyczny jest zdefiniowany w następujący sposób:

$$E_n = \frac{1}{2}mv^2 + U$$



Rysunek 8. Energia w modelu Bohra

Po podstawieniu (4) otrzymujemy:

$$E_n = \frac{1}{2}mv^2 + (-mv^2) = -\frac{1}{2}mv^2$$

Ostatecznie po wstawieniu prawej strony (6) podniesionej do kwadratu otrzymujemy:

$$E_n = -k_0^2 \frac{Z^2 m e^4}{2\hbar^2} \frac{1}{n^2} = -13,6 \left( \frac{Z^2}{n^2} \right) eV$$

Wynik ten mimo wymienionych wcześniej nieścisłości w rozumowaniu jest zgodny ze wzorem na energię otrzymywaną za pomocą współczesnej teorii kwantowej.

### 2.3. Elektron w nieskończonej studni potencjału (wyprowadzenie)

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + v(x) ; v(x) = 0$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\phi}{dx^2} = E\phi$$

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = -\frac{2mE}{\hbar^2}\phi ; K^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$$

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} + K^2\phi = 0 - \text{analogia do oscylatora harmonicznego}$$

$$\phi(x) = A\sin Kx + B\cos Kx$$

$$\phi(0) = \phi(L) = 0$$

$$\phi(0) = A\sin K \cdot 0 + B\cos K \cdot 0 \Rightarrow B = 0$$

$$\phi(x) = A\sin Kx$$

$$0 = \phi(L) = A\sin K \cdot L$$

$$\sin K \cdot L = 0 \Rightarrow KL = n\pi$$

$$\phi(x) = A\sin \frac{\pi x n}{L}$$

I teraz mamy że:

$$K = \frac{\pi n}{L} ; E = \frac{\hbar^2 K^2}{2m}$$

$$E = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} n^2$$

### 3. Elementy fizyki jądrowej

#### 3.1. Energia wiązania (definicja). Oddziaływanie nukleon-nukleon. Ciężkie jądra atomowe. Wykres zależności energii wiązania od liczby masowej.

##### 1. Energia wiązania.

Dla przykładu porównajmy masę atomu  ${}^4_2\text{He}$  z sumą mas jego składników.

$$M({}^4_2\text{He}) = 4,0026033u$$

Natomiast całkowita masa jego składników równa jest sumie mas dwu atomów wodoru  ${}^1_1\text{H}$  i dwóch neutronów:

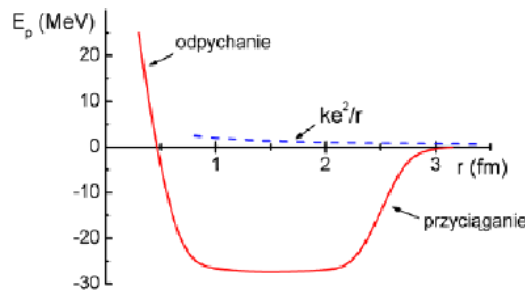
$$2M({}^1_1\text{H}) + 2M({}^1_0\text{n}) = 2 \cdot 1,0078252u + 2 \cdot 1,0086654u = 4,0329812u$$

Masy dwóch elektronów są uwzględnione w masie helu jak i w masach dwóch atomów wodoru. Zauważmy, że masa helu jest mniejsza od masy składników o wartość  $0,0303779u$ . Analogiczny rachunek pokazuje, że dla każdego atomu jego masa jest mniejsza od masy składników o wielkość  $\Delta M$  zwaną niedoborem masy lub defektem masy.

Wynik ten jest świadectwem istnienia energii wiązania jąder jak i równoważności masy i energii. Zauważmy, że energia nukleonów tworzących jądro zmienia się w miarę ich zbliżania od wartości  $E = 0$  dla nukleonów swobodnych ( $r \rightarrow \infty$ ) do wartości ujemnej  $E < 0$  dla nukleonów w jądrze. Oznacza to, że gdy układ oddzielnych swobodnych nukleonów łączy się w jądro energia układu zmniejsza się o wartość  $\Delta E$  energii wiązania jądra. Zgodnie ze wzorem Einsteina całkowita energia spoczywającego jądra jest związana z jego masą zależnością  $E = mc^2$ . Oznacza to, że zmniejszeniu o  $\Delta E$  całkowitej energii układu musi towarzyszyć, zgodnie z teorią względności, zmniejszenie masy układu o  $\Delta M$

##### 2. Oddziaływanie nukleon-nukleon.

Dotychczas poznane oddziaływania (grawitacyjne, elektromagnetyczne) nie pozwalają na wyjaśnienie struktury jądra atomowego. Aby wyjaśnić co tak silnie wiąże nukleony w jądrach atomowych trzeba wprowadzić nowe oddziaływanie. Ta siła wiążąca musi być większa niż siła odpychania elektrostatycznego występująca pomiędzy protonami. Określamy ją mianem siły jądrowej lub oddziaływania silnego. Oddziaływanie proton - proton, proton - neutron i neutron - neutron jest identyczne (jeżeli zaniedbamy relatywnie małe efekty odpychania elektrostatycznego) i nazywamy go oddziaływaniem nukleon - nukleon.



Rysunek 9.

Energia potencjalna oddziaływania nukleon - nukleon (linia ciągła) w porównaniu z energią odpychania proton - proton (linia przerywana)

3. Ciężkie jądra atomowe.

Jądra ulegające rozszczepieniu zwykle są jądrami ciężkimi, które posiadają więcej neutronów niż protonów, obydwa fragmenty powstałe w rozszczepieniu są jądrami neutrono-nadmiarowymi. Nadmiar neutronów jest z nich emitowany wkrótce po procesie rozszczepienia, te zjawisko nosi nazwę emisji neutronów opóźnionych.

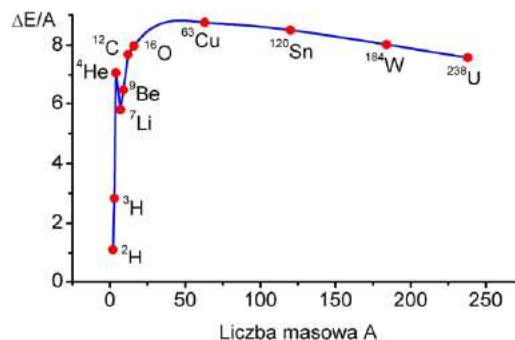
4. Wykres zależności energii wiązania od liczby masowej.

Masy atomowe i energie wiązań można wyznaczyć doświadczalnie w oparciu o spektroskopię masową lub bilans energii w reakcjach jądrowych. W tabeli zestawione są masy atomowe i energie wiązań  $\Delta E$  jąder atomów wybranych pierwiastków.

	Z	A	Masa (u)	$\Delta E$ (MeV)	$\Delta E/A$
${}^1_0\text{H}$	0	1	1.0086654	-	-
${}^1_1\text{H}$	1	1	1.0078252	-	-
${}^4_2\text{He}$	2	4	4.0026033	28.3	7.07
${}^9_4\text{Be}$	4	9	9.0121858	58.0	6.45
${}^{12}_6\text{C}$	6	12	12.0000000	92.2	7.68
${}^{16}_8\text{O}$	8	16	15.994915	127.5	7.97
${}^{63}_{29}\text{Cu}$	29	63	62.929594	552	8.50
${}^{120}_{50}\text{Sn}$	50	120	119.9021	1020	8.02
${}^{184}_{74}\text{W}$	74	184	183.9510	1476	8.02
${}^{238}_{92}\text{U}$	92	238	238.05076	1803	7.58

Rysunek 10.

W ostatniej kolumnie tabeli podana jest wielkość energii wiązania przypadającej na nukleon w jądrze  $\frac{\Delta E}{A}$ . Jest to jedna z najważniejszych cech charakteryzujących jądro. Zauważmy, że początkowo wielkość  $\frac{\Delta E}{A}$  wzrasta ze wzrostem liczby A, ale potem przybiera w przybliżeniu stałą wartość około 8 MeV. Wyniki średniej energii wiązania na nukleon w funkcji liczby masowej jądra A są pokazane na rysunku poniżej.



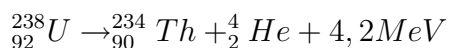
Rysunek 11.

### 3.2. Rozpad $\alpha$ . Rozpad $\beta$ . Powstanie plutonu 239

1. Rozpad  $\alpha$

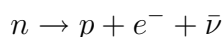
Szczególnie ważnym rozpadem promieniotwórczym jest rozpad alfa ( $\alpha$ ) występujący zazwyczaj w jądrami o  $Z \geq 82$ . Rozpad alfa polega na przemianie niestabilnego jądra w nowe jądro przy emisji jądra  ${}^4\text{He}$  tzn. cząstki  $\alpha$ . Dla ciężkich jąder energia wiązania pojedynczego

nukleonu maleje ze wzrostem liczby masowej więc zmniejszenie liczby nukleonów (w wyniku wypromieniowania cząstki  $\alpha$ ) prowadzi do powstania silniej związanego jądra. Proces zachodzi samorzutnie bo jest korzystny energetycznie. Energia wyzwolona w czasie rozpadu (energetyczny równoważnik niedoboru masy) jest unoszona przez cząstkę  $\alpha$  w postaci energii kinetycznej. Przykładowa reakcja dla jądra uranu wygląda następująco:



## 2. Rozpad $\beta$

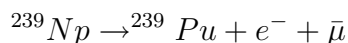
Istnieją optymalne liczby protonów i neutronów, które tworzą jądra najsilniej związane (stabilne). Jądra, których ilość protonów  $Z$  różni się od wartości odpowiadającej stabilnym jądom o tej samej liczbie masowej  $A$ , mogą zmieniać  $Z$  w kierunku jąder stabilnych poprzez rozpad beta ( $\beta$ ). Jeżeli rozpatrywane jądro ma większą od optymalnej liczbę neutronów to w jądrze takim zachodzi przemiana neutronu w proton.



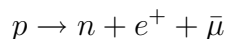
Neutron  $n$  rozpada się na proton  $p$ , elektron i antyneutrino  $\nu$  (cząstka elementarna o zerowym ładunku i zerowej masie spoczynkowej). Ten proces nosi nazwę rozpadu  $\beta^-$  (beta minus). Przykładem takiej przemiany jest rozpad uranu:



Powstały izotop też nie jest trwały i podlega dalszemu rozpadowi.



W takim procesie liczba protonów  $Z$  wzrasta o jeden, a liczba nukleonów  $A$  pozostaje bez zmiany.  $Z$  kolei gdy jądro ma nadmiar protonów to zachodzi proces przemiany protonu w neutron



Proton  $p$  rozpada się na neutron  $n$ , pozyton i neutrino (cząstka elementarna o własnościach bardzo zbliżonych do antyneutrino). Ten proces nosi nazwę rozpadu  $\beta^+$  (beta plus). W tym procesie liczba protonów  $Z$  maleje o jeden, a liczba nukleonów  $A$  pozostaje bez zmiany. Pierwiastki powstające w rozpadach  $\alpha$  i  $\beta$  są na ogół także promieniotwórcze i ulegają dalszemu rozpadowi. Większość naturalnych pierwiastków promieniotwórczych można podzielić na trzy grupy, nazywane szeregami promieniotwórczymi. W szeregu uranu rozpoczynającym się od  ${}_{92}^{238}u$  liczby masowe zmieniają się według wzoru  $4n + 2$ . W szeregu aktynu rozpoczynającym się od  ${}_{92}^{235}u$  liczby masowe zmieniają się według wzoru  $4n + 3$ , a w szeregu toru rozpoczynającym się od  ${}_{90}^{232}Th$  liczby masowe są opisane wzorem  $4n$ . Wszystkie trzy szeregi kończą się na trwałych izotopach ołowiu. Każdy naturalny materiał promieniotwórczy zawiera wszystkie pierwiastki wchodzące w skład danej rodziny i dlatego promieniowanie wysyłane np. przez minerały jest bardzo złożone.

Promieniowanie gamma:

Rozpadowi  $\alpha$  i  $\beta$  towarzyszy zazwyczaj emisja wysokoenergetycznego promieniowania elektromagnetycznego zwanego promieniowaniem gamma ( $\gamma$ ). Ta samoczynna emisja fotonów następuje gdy jądra posiadające nadmiar energii czyli znajdujące się w stanie wzbudzonym przechodzą do niższych stanów energetycznych. Widmo promieniowania  $\gamma$  ma charakter

liniowy tak jak charakterystyczne promieniowanie X i bardzo wysoką energię, tysiące razy większą od energii fotonów wysyłanych przez atomy. Jądra w stanie wzbudzonym można również otrzymać za pomocą neutronów o małej energii. Przykładowo, jeżeli skierujemy wiązkę takich powolnych neutronów na próbkę uranu  $^{238}\text{U}$  to część neutronów zostanie wychwyconych i powstaną jądra uranu  $^{238}\text{U}^*$  w stanie wzbudzonym (oznaczone \*). Takie jądra przechodzą do stanu podstawowego emitując kwanty  $\gamma$ . Proces ten przebiega następująco:



Należy podkreślić, że emisji promieniowania gamma nie towarzyszy zmiana liczby masowej ani liczby atomowej.

### 3.3. Prawo rozpadu promieniotwórczego (wyprowadzenie)

$n(t)$  - liczba jąder które do czasu  $t$  nie uległy rozpadowi

$$\frac{\text{prawdopodobieństwo rozpadu}}{1s} =: \frac{1}{\tau}$$

$$n(t) \frac{dt}{\tau} = -(n(t+dt) - n(t))$$

$$\frac{n(t)}{\tau} = -n'(t) = -\frac{dn(t)}{dt}$$

$$\frac{dn(t)}{n(t)} = -\frac{dt}{\tau}, \text{ następnie całkujemy i mamy:}$$

$$n(t) = n_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

tępo zaniku substancji radioaktywnych.

Czas połowicznego rozpadu:

$$\frac{1}{2}n_0 = n_0 e^{-\frac{T_{\frac{1}{2}}}{\tau}}$$

$$-\ln 2 = -\frac{T_{\frac{1}{2}}}{\tau}$$

$$T_{\frac{1}{2}} = \tau \ln 2$$

Metoda Węglowa: Jeżeli znamy stężenie węgla w biosferze w chwili przerwania metabolizmu, to możemy obliczyć jej wiek na podstawie prawa połowicznego rozpadu.

### 3.4. Rozszczepienie jąder atomowych. Reakcje łańcuchowe. Reaktory jądrowe.

#### Synteza jądrowa

1. Rozszczepienie jąder atomowych:

Energia wiązania na jeden nukleon wzrasta z liczbą masową aż do  $A > 50$ . Dzieje się tak dlatego, że dany nukleon jest przyciągany przez coraz większą liczbę sąsiednich nukleonów. Jednak przy dalszym wzroście liczby nukleonów nie obserwujemy wzrostu energii wiązania nukleonu w jądrze, a jej zmniejszanie. Wyjaśnienie tego efektu można znaleźć analizując wykres zależności energii wiązania od liczby masowej. Widać na nim, że siły jądrowe mają bardzo krótki zasięg i jeżeli odległość między dwoma nukleonami jest większa niż  $2,5 \cdot 10^{-15}$

m to oddziaływanie pomiędzy nimi jest słabsze. Jądra zawierające dużą liczbę nukleonów mają większe rozmiary i odległości pomiędzy poszczególnymi nukleonami mogą być relatywnie duże, a stąd słabsze przyciąganie pomiędzy nimi. Konsekwencją takich zmian energii wiązania ze wzrostem liczby nukleonów w jądrze jest występowanie zjawisk rozszczepienia i syntezy jądrowej. Jeżeli ciężkie jądro rozdzielimy na dwie części, to powstałe dwa mniejsze jądra są silniej związane od jądra wyjściowego to znaczy te dwie części mają masę mniejszą niż masa jądra wyjściowego. Dzięki temu w reakcji rozszczepienia wydziela się energia. Źródłem energii bomby atomowej i reaktora jądrowego są procesy rozszczepienia jądrowego. Spontaniczne rozszczepienie naturalnego jądra jest na ogół mniej prawdopodobne niż rozpad  $\alpha$  tego jądra. Można jednak zwiększyć prawdopodobieństwo rozszczepienia bombardując jądra neutronami o odpowiednio wysokiej energii. Właśnie takie neutrony powodują reakcje rozszczepienia uranu  $^{235}\text{U}$  i plutonu  $^{239}\text{Pu}$ .

Analizując liczby masowe i atomowe pierwiastków można zauważyć, że pierwiastki lekkie zawierają w jądrze zbliżone ilości protonów i neutronów podczas gdy dla pierwiastków ciężkich przeważa liczba neutronów. W związku z tym w reakcji rozszczepienia powstaje na ogół kilka neutronów. W konsekwencji rozszczepienie jądrowe może stać się procesem samopodtrzymującym w wyniku tak zwanej reakcji łańcuchowej. Jeżeli przynajmniej jeden z powstałych neutronów wywoła kolejne rozszczepienie to proces będzie sam się podtrzymywał. Ilość materiału powyżej, której spełniony jest powyższy warunek nazywamy masą krytyczną.

## 2. Reakcje łańcuchowe:

Jeżeli liczba rozszczepień na jednostkę czasu jest utrzymywana na stałym poziomie to mamy do czynienia z kontrolowaną reakcją łańcuchową. Po raz pierwszy taką reakcję rozszczepienia przeprowadzono (E. Fermi) na Uniwersytecie Chicago w 1942 r. Masa materiału rozszczepianego (np.  $^{235}\text{U}$  czy  $^{239}\text{Pu}$ ) może też być nadkrytyczna. Wówczas neutrony powstałe w wyniku jednego rozszczepienia wywołują więcej niż jedną reakcję wtórną. Mamy do czynienia z lawinową reakcją łańcuchową. Cała masa nadkrytyczna może być rozszczepiona (zużyta) w bardzo krótkim czasie,  $t < 0.001$  s, ze względu na dużą prędkość neutronów ( $3 \cdot 10^5 [\frac{m}{s}]$ ). Tak eksploduje bomba atomowa. Najczęściej przygotowuje się kulę o masie nadkrytycznej ale rozrzedzonej. Następnie otacza się ją klasycznymi ładunkami wybuchowymi, których detonacja wywołuje wzrost ciśnienia zewnętrznego i gwałtownie zwiększenie gęstości materiału (zmniejsza się objętość kuli). W konsekwencji osiągnięty zostaje stan nadkrytyczny. Oczywiście w elektrowniach atomowych spalanie paliwa odbywa się bardzo powoli. W związku z tym konieczne jest spowalnianie neutronów i dobór warunków stacjonarnej pracy reaktora. Wymaga to stosowania skomplikowanych instalacji dużo droższych niż w elektrowniach konwencjonalnych spalających węgiel. Dodatkowe, bardzo znaczne koszty w elektrowni atomowej są związane z budową i eksploatacją systemu ochrony i zabezpieczeń oraz ze składowaniem odpadów promieniotwórczych. Jednak pomimo tak wysokich kosztów energia jądrowa skutecznie konkuruje z paliwem tradycyjnym i jest bardziej ekonomiczna na dużą skalę. Również zanieczyszczenia powstające przy spalaniu węgla w tradycyjnych elektrowniach stanowią nie mniejszy (a w opinii wielu znacznie większy) problem niż odpady promieniotwórcze. Energia jądrowa powinna ułatwić pokrycie światowego zapotrzebowania na energię w obliczu wyczerpywania się tradycyjnych źródeł energii.

## 3. Reaktory jądrowe:

Jest to urządzenie służące do wytwarzania kontrolowanej reakcji łańcuchowej, tj. ciągłego pozyskiwania energii z rozszczepiania jąder atomowych. Stan kontrolowanej reakcji jądrowej

podtrzymującej się samoczynnie na ustalonym poziomie nazywany jest stanem krytycznym. Jeśli intensywność reakcji narasta, to stan jest nadkrytyczny, gdy wygasa, to stan jest podkrytyczny. Reaktor jest sterowalny i bezpieczny, gdy ma małą, dodatnią reaktywność związaną z neutronami opóźnionymi. Typowy reaktor jądrowy zbudowany jest z rdzenia, reflektora neutronów oraz osłon biologicznych. Sam rdzeń zawiera pręty paliwowe, pręty regulacyjne, pręty bezpieczeństwa, moderator, kanały chłodzenia i kanały badawcze. Podstawowym elementem reaktora jądrowego są pręty paliwowe, które zawierają paliwo jądrowe w formie fizykochemicznej i o stopniu wzbogacenia dostosowanym do konstrukcji reaktora jądrowego. Moderator wykonany jest z materiałów zawierających duże ilości atomów o małej liczbie porządkowej skutecznie zmniejszających energię neutronów produkowanych w trakcie rozszczepiania. Pręty regulujące i pręty bezpieczeństwa zbudowane są z substancji pochłaniających neutrony (np. bor, kadm), przy czym pręty regulacyjne służą do precyzyjnej zmiany strumienia neutronów, podczas gdy pręty bezpieczeństwa mają za zadanie całkowite przerwanie reakcji łańcuchowej w sytuacji awaryjnej - oba te rodzaje prętów wsuwa się i wysuwa z rdzenia w miarę potrzeby. Przez kanały chłodzące przepompowuje się chłodziwo tzw. pierwszego obiegu (typowym chłodziwem jest woda, stosuje się również powietrze, azot, ciekły sód itd.). Kanały badawcze służą do kontrolowania poziomu strumienia neutronów i wykonywania naświetlań.

Ciekawostka: CP-1, Chicago Pile 1, pierwszy na świecie reaktor jądrowy uruchomiony 2 XII 1942 o 15:25 przez E. Fermiego w podziemiach stadionu piłkarskiego w Chicago. Zawierał 6 t metalicznego uranu i 34 t tlenku uranu, posiadał moderator grafitowy. Osiągał moc 200 W. W 1943 przeniesiono go do Argonne National Laboratory (ANL), gdzie po udoskonaleniach uruchomiono go ponownie jako CP-2.

#### 4. Synteza jądrowa:

Masa dwóch lekkich jąder jest większa niż masa jądra powstającego po ich połączeniu. Jeżeli więc takie jądra zbliżymy do siebie na dostatecznie małą odległość, to z ich połączenia powstanie nowe jądro i wydzieli się energia związana z różnicą mas. Przykładowo przy połączeniu dwóch deuteronów  ${}^2_1H$  (jądro izotopu wodoru) w jądro helu, 0,6% masy zostanie zamienione na energię. Metoda ta jest wydajniejsza od rozszczepiania jąder uranu. Poza tym dysponujemy nieograniczonym źródłem deuteru w wodzie mórz i oceanów. Jednak istnieje przeszkoda w otrzymaniu energii tą metodą. Jest nią odpychanie kulombowskie, które nie pozwala zbliżyć się deuteronom na odległość niezbędną do ich połączenia (porównywalną z zasięgiem przyciągających sił jądrowych). Reakcja ta nie jest możliwa w temperaturze pokojowej ale byłaby możliwa gdyby deuter mógł być ogrzany do temperatury około  $5 \cdot 10^7$  K. Reakcje, które wymagają takich temperatur nazywamy reakcjami termojądrowymi. Temperatury osiągnęte podczas wybuchu bomby atomowej są wystarczające do zapoczątkowania takiej reakcji. Raz zapoczątkowana reakcja termojądrowa wytwarza dostateczną ilość energii do utrzymania wysokiej temperatury (dopóki materiał nie zostanie spalony). Tak działa bomba wodorowa. Nam jednak zależy na uzyskaniu użytecznej energii z reakcji syntezy jądrowej to znaczy na prowadzeniu reakcji w sposób kontrolowany. Dlatego prowadzone są próby skonstruowania reaktora termojądrowego. Podstawowym problemem jest utrzymanie gazu o tak wysokiej temperaturze, w pewnej ograniczonej objętości. Czas trwania reakcji musi być wystarczająco długi żeby wytworzona energia była większa od energii zużytej na uzyskanie tak gorącego gazu (uruchomienie reaktora). Stwarza to wiele problemów technicznych i jak dotąd nie udało się przeprowadzić zakończonej sukcesem kontrolowanej reakcji

termojądrowej. W przyrodzie obserwuje się ciągłe wytwarzanie energii termojądrowej. Procesy termojądrowe są źródłem energii gwiazd w tym i „naszego” Słońca.

## 4. Elementy astrofizyki i fizyki cząstek elementarnych

### 4.1. Ciśnienie termiczne i cykl wodorowy. Ciśnienie kwantowo-mechaniczne

— Ciśnienie termiczne - jest to ciśnienie wywołane ogrzewaniem gazu przez energię z reakcji termojądrowych. Wyraża się ono wzorem:

$$p_T = \frac{\rho k T}{m_p}$$

gdzie  $m_p$ -masa protonu,  $\rho$ -gęstość,  $k$ -stała Boltzmana,  $T$ -temperatura.

— Cykl wodorowy - jest to ciąg reakcji termojądrowych, główny mechanizm produkcji energii przez Słońce i inne gwiazdy bogate w wodór. Cykl ten może się rozpocząć jeśli masa początkowa gwiazdy będzie równa 0,08 masy Słońca, wtedy też gwiazda osiąga dostatecznie wysoką temperaturę. W wyniku cyklu wodorowego 4 protony są zużywane do utworzenia cząstki  $\alpha$ , 2 pozytonów, 2 neutrin i 2 fotonów o całkowitej energii kinetycznej około 26 MeV.

— Ciśnienie kwantowo-mechaniczne - ciśnienie nierelatywistycznego, idealnego gazu Fermiego

$$p = \frac{2}{5} \frac{n K_f}{V} = \frac{h^2}{20m} \left(\frac{3}{\pi}\right)^{\frac{2}{3}} \left(\frac{n}{V}\right)^{\frac{5}{3}}$$

gdzie:  $K_f$ -energia Fermiego,  $V$ -objętość w której znajduje się  $n$  cząstek,  $h$ -stała Plancka.

### 4.2. Biały karzeł (analiza energii - schemat)

Biały karzeł jest to niewielki (rzędu rozmiarów Ziemi) obiekt astronomiczny wysyłający białe światło. Powstaje po "śmierci" mało lub średnio masywnej gwiazdy (poniżej 1,4 masy Słońca), której jądro nie osiągnęło temperatury wystarczającej do zapłonu węgla w reakcjach syntezy termojądrowej. Gwiazda ta, podczas spalania helu, rozděła się (stadium czerwonego olbrzyma), a następnie odrzuciła zewnętrzne warstwy, stając się mgławicą planetarną z gorącym, tlenowo-węglowym jądrem w środku. Jądro to, pozbawione źródła energii, stopniowo ochładza się, emitując zgromadzone wcześniej ciepło. Brak ciśnienia reakcji termojądrowych sprawia, że zapada się ono pod własnym ciężarem osiągając ogromną gęstość - masa naszego Słońca ścisnięta jest w wielkości Ziemi. Przed dalszym zapadaniem białego karła chroni jedynie ciśnienie elektronów. Maksymalna masa, jaką obiekt może osiągnąć, zanim grawitacja je przewycięży, znana jako granica Chandrasekhara, wynosi ok. 1,4 masy Słońca. Po jej przekroczeniu, najczęściej w wyniku przyływu materii z innego członka układu podwójnego, biały karzeł wybucha jako supernowa typu Ia, pozostawiając po sobie gwiazdę neutronową.

Po kilkuset miliardach lat temperatura białego karła obniża się do tego stopnia, że przestaje on być widoczny - staje się czarnym karłem. Jednakże Wszechświat istnieje zbyt krótko (ok. 15 mld lat), by obiekty te zdążyły powstać nawet z najstarszych białych karłów.

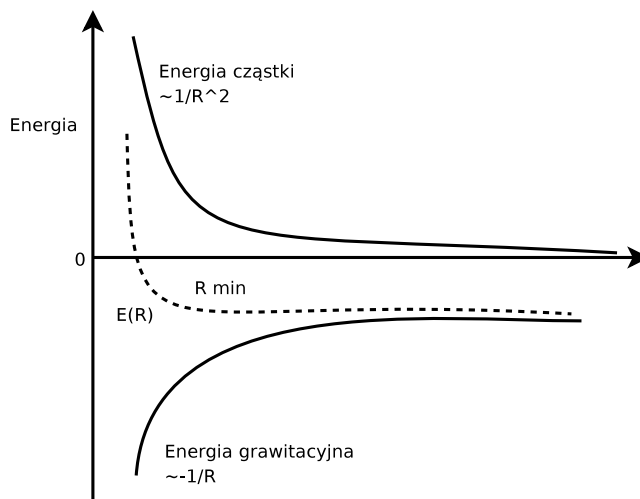
Analiza energii:

Całkowita energia białego karła czyli zimnej, wypalanej gwiazdy jest funkcją  $E(R)$  promienia gwiazdy  $R$ . Na początku zakładamy, że elektrony i protony są nierelatywistyczne. Następnie wkład od jader jest zaniebdywany ponieważ jest on dużo mniejszy od wkładu

elektronów, ponieważ masa pojawiająca się w mianowniku jest dużo większa ( $K_f = \frac{p_f^2}{2m}$ ). Jeśli temperatura gwiazdy jest na tyle niska, że można zaniedbać energię termiczną w porównaniu z energią kwantowo-mechaniczną to całkowita energia gwiazdy jest dana wzorem:

$$E(R) = n_e \bar{K}_e + U = \frac{3}{5} n_e (K_f)_e - \frac{3}{5} \frac{GM^2}{R}$$

gdzie:  $n_e = xn$  ( $x = \frac{\text{liczba protonów}}{\text{liczba masowa}}$ ,  $n$ -liczba nukleonów)



Rysunek 12. Dwa wkłady do całkowitej energii białego karła.

Górna krzywa opisuje całkowitą energię kinetyczną elektronów, a dolna krzywa grawitacyjną energię potencjalną gwiazdy. Suma obydwu krzywych oznaczona linią przerywaną ma minimum dla  $R = R_{min}$ .

#### 4.3. Gwiazda neutronowa (analiza energii - schemat)

Gwiazda neutronowa - jest jednym z końcowych etapów ewolucji gwiazdy. Jest to obiekt astronomiczny o niewielkiej średnicy, ale o bardzo dużej gęstości. Przy rozmiarach rzędu 10 – 15 km ma masę do 1,4 – 2,5 mas Słońca. Gęstość gwiazdy odpowiada układowi blisko siebie leżących neutronów, może być więc traktowana jako ogromne jądro atomowe (1057 barionów) utrzymywane w równowadze przez siły grawitacyjne. Gwiazdy neutronowe powstają w wyniku ewolucji gwiazd o dużych masach ( $\sim 8 - 10$  mas Słońca). Gwiazdy neutronowe powstają podczas wybuchu supernowej (supernowe Typu II lub Ib) lub kolapsu białego karła (supernowa Typu Ia). Materia na powierzchni gwiazdy neutronowej (skorupa) składa się z zwykłych jąder żelaza (Fe) i swobodnych elektronów. Głębiej gdzie panuje wysokie ciśnienie maleją odległości między jądrami. Atomy zostają zmiażdżone, a elektrony łączą się z protonami jąder, jądra stają się coraz bardziej niesymetryczne (z przewagą neutronów). Takie jądra są niestabilne na Ziemi, we wnętrzu gwiazdy proces rozpadu tych jąder jest rekompensowany powstawaniem nowych. Jeszcze głębiej jądra są tak blisko, że neutrony mogą przeskakiwać między jądrami - wówczas

już trudno mówić o oddzielnych jądrach, skoro materia wygląda jak ciągły stan neutronów. Ten proces nazywamy 'ściekaniem neutronów'. Ma to miejsce gdy gęstość we wnętrzu gwiazdy przekroczy  $4 \cdot 10^{11} \frac{g}{cm^{-3}}$ . Na Ziemi swobodne neutrony są nietrwałe i rozpadają się (rozpad  $\beta$ ).

Analiza energii:

Elektrony w gwiazdzie neutronowej są relatywistyczne, a protony i neutrony nierelatywistyczne. Energia gwiazdy neutronowej zależy nie tylko od  $R$  tak jak energia białego karła, zależy ona również od  $x$ :

$$E(R, x) = \text{energia neutronów} + \text{energia elektronów} + \text{energia grawitacyjna}$$

Wartości  $R$  i  $x$  możemy wyznaczyć rozwiązując następujący układ równań:

$$\frac{\partial E}{\partial R} = 0 \text{ oraz } \frac{\partial E}{\partial x} = 0$$

Po rozwikłaniu tego układu równań otrzyma się że ponad 99% nukleonów gwiazdy neutronowej stanowią neurony.

#### 4.4. Czarna dziura

Czarna dziura – obiekt astronomiczny, który tak silnie oddziałuje grawitacyjnie na swoje otoczenie, że nawet światło nie może uciec z jego powierzchni. Żaden rodzaj energii ani materii nie może opuścić czarnej dziury. Czarna dziura powstaje, kiedy gwiazda o masie przynajmniej 40-krotnie większej od Słońca zapada się pod wpływem własnego ciężaru po wyczerpaniu paliwa atomowego. Granica, po przejściu której nie jest możliwe wyrwanie się z pola grawitacyjnego czarnej dziury, nazywana jest horyzontem zdarzeń. Ma ona kształt sfery o wielkości wyznaczonej przez promień Schwarzschilda:

$$R_s = \frac{2GM}{c^2}$$

Promień ten został wyprowadzony z klasycznej teorii grawitacji Isaaca Newtona:

$$E = -\frac{mMG}{r} + \frac{mv^2}{2} = 0 \Rightarrow v^2 = \frac{2GM}{r}$$

A teraz kiedy prędkość cząstki jest równa prędkości światła to  $r$  przechodzi w  $R_s$  (promień Schwarzschilda).

Kiedy wewnątrz gwiazdy o masie przynajmniej 40 razy większej od masy Słońca zaczyna kończyć się wodór, rozpoczyna się jej agonia. W jądrze najpierw zużywany jest hel, potem kolejne, coraz cięższe pierwiastki. Kiedy gwiazda zaczyna zużywać żelazo, nie jest już w stanie wytworzyć dość energii, aby przeciwdziałać zapadaniu się pod wpływem własnej grawitacji – reakcja jądrowa wymaga wówczas już dostarczania energii z zewnątrz, nie produkuje nadwyżki energetycznej. Podczas potężnej eksplozji nazywanej supernową i spowodowanej gwałtownym spadkiem ciśnienia i utratą stabilności mechanicznej spora części materii gwiazdowej ucieka. W środku pozostaje żelazne jądro, które zaczyna się zapadać i tworzy gwiazdę neutronową utrzymywaną w stabilności mechanicznej. Jeżeli jej masa jest dość wielka, to również takie ciało nie wytrzymuje własnego ciężaru i powstaje czarna dziura.

Ciekawe efekty fizyczne w polu czarnej dziury:

- Grawitacyjne przesunięcie ku czerwieni (długość fali się zwiększa).
- Zwolnienie biegu czasu dla zewnętrznego obserwatora.
- Dla spadającego obserwatora do czarnej dziury nie występuje zwolnienie czasu.

#### 4.5. Rozszerzający się Wszechświat

Wszechświat rozszerzający się - teoria próbująca wyjaśnić losy wszechświata, zarówno bezpośrednio po Wielkim Wybuchu jak i te, które dopiero nastąpią.

W teorii wszechświata rozszerzającego się, nasz wszechświat można wyobrazić sobie jako powierzchnię nadmuchiwanego balonu, który jednak nigdy nie pęknie. Tym samym galaktyki oddalają się od siebie coraz bardziej, co potwierdza prawo Hubble'a:

$$v = H_0 s$$

$H_0$ -stała Hubble'a ( $2,1 \cdot 10^{-18} [\frac{1}{s}]$ ),  $s$ -odległość obserwatora od galaktyki.

Przewiduje się, iż we wszechświecie nie ma siły wystarczająco dużej aby powstrzymać tą ekspansję. Ostatnie badania nad ciemną materią potwierdziły, że nie ma jej wystarczająco dużo aby utrzymała taki wszechświat w stabilności. W końcu wszechświat stanie się "rzadką zupą" z raczej nudną treścią w postaci rozproszonych gwiazd i galaktyk.

Oddalające się od siebie Galaktyki wywołują relatywistyczny efekt Dopplera (czyli przesunięci długości fali ku czerwieni):

$$\lambda_0 = \lambda \sqrt{\frac{c+v}{c-v}}$$

Jeżeli hipotetycznie odwrócimy czas to dojdziemy do wielkiego wybuchu - Big Bang

$$t = \frac{s}{H_0 s} = H_0^{-1} \Rightarrow H_0^{-1} \sim 10^{18} \approx 15 \cdot 10^9 \text{ lat}$$

Model inflacyjny:

Bierzemy balonik i rysujemy na nim dwa punkty, następnie nadmuchujemy balonik i obserwujemy oddalanie się od siebie punktów. Wniosek jest taki, że punkty się nie przesuwają tylko przestrzeń się rozszerza.

Gęstość krytyczna:

Gęstość krytyczna - w kosmologii oznacza taką średnią gęstość materii nierelatywistycznej, jaką miały Wszechświat o zerowej krzywiznie i płaskiej geometrii. Wyprowadzenie:

$$E = \frac{1}{2} m v^2 - G \frac{m M}{R} = 0, v = H_0 R$$

$$\rho_c = \frac{3 H_0^2}{8 \pi G}$$

I przy takiej gęstości galaktyka ucieknie do nieskończoności.

Jeżeli  $\rho > \rho_c \Rightarrow$  zatrzymanie rozszerzenia wszechświata,

$\rho < \rho_c \Rightarrow$  rozszerzenie wszechświata do nieskończoności.

#### 4.6. Kwarki. Materia i oddziaływanie

Kwark to jedna z dwóch grup cząstek elementarnych, które według dzisiejszego stanu wiedzy są niepodzielne. Drugą grupą są leptony. Za symbol kwarka przyjmuje się literę  $q$ . Wszystkie kwarki posiadają swoje antycząstki, nazywane antykwarkami, oznaczane symbolem  $\bar{q}$ .

Hipotezę istnienia kwarków (które początkowo nazywano partonami), jako elementarnych składników materii wysunęli niezależnie G. Zweig i Gell-Mann w 1964 roku. Nazwę zaproponował Gell-Mann. Słowo "quark" wyczytał on w zdaniu "Three quarks for Muster Mark!" w

powieści Finnegans Wake autorstwa Jamesa Joyce'a. Spodobało mu się to zdanie, bo była w nim mowa o trzech "kwarkach" - a to właśnie istnienie trzech cząstek: u, d i s oraz ich antycząstek:  $\bar{u}$ ,  $\bar{d}$  i  $\bar{s}$  początkowo postulowali. Wraz z rozwojem fizyki wysokich energii oraz fizyki cząstek elementarnych okazało się, że trójka kwarków i antykwarków nie jest wystarczająca. Lista kwarków została powiększona o trzy cięższe kwarki: c, b i t oraz ich antycząstki:  $\bar{c}$ ,  $\bar{b}$  i  $\bar{t}$ .

Kwarki mają 3 "kolory" - zielony, czerwony i niebieski. Kolory kwarkowe nie mają nic wspólnego z pojęciem koloru w potocznym sensie - stanowią rodzaje ładunków związanych z oddziaływaniami silnymi. Kolory nie są przyporządkowane do pojedynczych kwarków w sposób stały, ponieważ potrafią się one wymieniać kolorami w oddziaływaniach silnych za pośrednictwem gluonów (to bezmasowa cząstka elementarna pośrednicząca w oddziaływaniach silnych między kwarkami. Gluon przenosi ładunki kolorowe między nimi). Kolory antykwarków określa się jako anty czerwony, anty zielony i anty niebieski.

Generacja	Słaby izospin	Zapach	Nazwa	Symbol	Ładunek (e)	Antycząstka	Symbol
1	$\frac{1}{2}$	$I_z = \frac{1}{2}$	Górny	u	$\frac{2}{3}$	Anty górny	$\bar{u}$
1	$-\frac{1}{2}$	$I_z = -\frac{1}{2}$	Dolny	d	$-\frac{1}{3}$	Anty dolny	$\bar{d}$
2	0	$S = -1$	Dziwny	s	$-\frac{1}{3}$	Anty dziwny	$\bar{s}$
2	0	$C = 1$	Powabny	c	$\frac{2}{3}$	Anty powabny	$\bar{c}$
3	0	$B' = -1$	Spodni	b	$-\frac{1}{3}$	Anty spodni	$\bar{b}$
3	0	$T = 1$	Szczytowy	t	$\frac{2}{3}$	Anty szczytowy	$\bar{t}$

Tabela 1. Kwarki

Kwarki nie istnieją samoistnie, lecz tylko w cząstkach neutralnych kolorowo:

- złożonych z 3 kwarków - bariony
- złożonych z 3 antykwarków - bariony antymaterii
- złożonych z 2 kwarków - jednego kwarku i jednego antykwarku - mezony.

Cząstki podzielono na dwie klasy:

1. Leptony, które nie oddziałują silnie:
  - a)  $e, \nu_e$ ,
  - b)  $\mu, \nu_\mu$ ,
  - c)  $\tau, \nu_\tau$
 (są to fermiony i mają spin ułamkowy)
2. Hadrony, które oddziałują silnie:
  - a) bariony: p, n, ...
  - b) mezony (są bozonami-mają spin całkowity):  $\pi^+$ ,  $\pi^-$ ,  $\pi^0$

## 5. Przestrzeń zakrzywiona (elementy ogólnej teorii względności)

### 5.1. Zakrzywione przestrzenie dwuwymiarowe. Zakrzywienie przestrzeni trójwymiarowej według Einsteina

Newton: ciało jest przyciągane przez inne z  $F \sim r^2$ ; ciało doznaje  $a \sim F$ .

Einstein: przestrzeń jest zakrzywiona.

Przykłady przestrzeni zakrzywionych w dwóch wymiarach: powierzchnia kuli, płaszczyzna gdzie temperatura wzrasta od środka do zewnątrz. Na tych figurach nie jesteśmy w stanie zbudować kwadratu, ani trójkąta (ma więcej niż 180°)

Przestrzeń zakrzywiona: przestrzeń, której geometria różni się od geometrii płaszczyzny.

Miara krzywizny:

$$r_{mierz} - r_{przew} = r_{nadwyz}$$

gdzie  $r$  to promień.

Na powierzchni kuli promień to łuk, który jest dłuższy od prawdziwego promienia, na rozgrzanej płycie promień się wydłuża.

Przestrzeń zakrzywiona: przestrzeń w której reguły geometrii Euklidesa załamują się.

Zakrzywienie przestrzeni trójwymiarowej wg Einsteina:

Weźmy kule i zmierzmy jej promień i pole

$$r_{przew} = \sqrt{\frac{A}{4\pi}}, \text{ gdzie } A\text{-zmierzone pole kuli}$$

$$r = r_{mierz} - \sqrt{\frac{A}{4\pi}}$$

Einstein: źródłem krzywizny jest materia, grawitacja jest związana z zakrzywieniem.

Założenie: materia jest rozłożona w sposób ciągły z gęstością, która może się zmieniać od punktu do punktu.

Przestrzeń: obszar wypełniony materią  $\rightarrow$  mała kula, że gęstość wewnątrz jest stała  $\rightarrow$  nadwyżka promienia kuli jest proporcjonalna do zawartej masy.

$$\Delta r = \frac{G}{3c^2}m ; m = \frac{4}{3}\pi\rho r^3$$

Ziemia:  $\Delta r \approx 1mm$

Słońce:  $\Delta r \approx 0,5km$

W obszarach ponad powierzchnią Ziemi średnia krzywizna zmienia się z wysokością.

## 5.2. Koncepcja linii prostej w czasoprzestrzeni. Grawitacja i zasada równoważności

Linia prosta: ruch z jednostajną prędkością w stałym kierunku.

Zasada równoważności: wszystkie przedmioty spadają z tym samym przyspieszeniem bez względu na masę, strukturę. W układzie lokalnym nie można przeprowadzić doświadczenia dzięki któremu dałoby się odróżnić spadek swobodny w polu grawitacyjnym od ruchu jednostajnego przy braku pola grawitacyjnego.

## 5.3. Rytm zegarów w polu grawitacyjnym. Zakrzywienie czasoprzestrzeni

Zegar A znajduje się na górze rakiety a zegar B na dole. Rakieta leci ruchem jednostajnie przyspieszonym. Zegar A wysyła impuls świetlny co sekundę. Zaś zegar B odbiera impulsy świetlne, odbiera je coraz szybciej chociaż zegar A wysyła impulsy dokładnie co sekundę. Spowodowane jest to ruchem jednostajnie przyspieszonym rakiety  $\rightarrow$  zegar A chodzi pozornie szybciej.

Pojazd spoczywający w polu grawitacyjnym Ziemi.

Zegar A tutaj również chodzi pozornie szybciej chociaż rakieta teraz się nie porusza. Wynika to z zasady równoważności → zmiana rytmu zegarów w polu grawitacyjnym.

Metodologia: zjawisko Dopplera (relatywistyczne).

$$\lambda = \lambda_0 \sqrt{\frac{c-v}{c+v}}$$

$$\omega = \frac{2\pi c}{\lambda}$$

$$\omega = \omega_0 \sqrt{\frac{c+v}{c-v}}$$

$$\omega = \omega_0 \sqrt{\frac{(c+v)^2}{c^2 - v^2}} = \omega_0 \frac{c+v}{\sqrt{c^2 - v^2}} = \omega_0 \frac{1+\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

rakieta jest nierelatywistyczna dlatego możemy pominąć  $\beta^2$

$$\omega = \omega_0(1 + \beta)$$

W danej chwili A i B poruszają się z jednakowymi prędkościami; A wysyła impuls → statek przyspiesza.

Przyrost prędkości:  $gt$ , gdzie  $t$  - czas jaki impuls potrzebuje na przebycie  $H$ ;  $t \cong \frac{H}{c}$  - ponieważ małe przyspieszenie

$$v = gt = g \frac{H}{c}$$

gdzie  $H$  - różnica wysokości,  $v$  to względna prędkość, A i B w chwilach wysyłania i odbierania impulsów

$$\omega = \omega_0 \left(1 + \frac{gH}{c^2}\right)$$

Z zasady równoważności wynika, że ten sam rezultat musi być słuszny dla zegarów w polu grawitacyjnym (różne wysokości, różnica  $H$ ), w którym przyspieszenie spadających ciał wynosi  $g$ .

Z zasady zachowania energii.

$$F_G \sim m \rightarrow m = \frac{E}{c^2}$$

Atom może być w stanie podstawowym o energii  $E_0$ , albo w wyższym stanie o energii  $E_1$

$$E_1 - E_0 = \hbar\omega_0$$

aby przenieść atom o masie  $m_1$  na poziom o wysokości  $H$  → praca przeciw sile pola grawitacyjnego

$$W = gHm_1 - gHm_0$$

$$E_1 + W = E_0 + \hbar\omega$$

$$E_1 + gH \frac{\hbar\omega_0}{c^2} = E_0 + \hbar\omega$$

$$E_1 - E_0 + gH \frac{\hbar\omega_0}{c^2} = \hbar\omega$$

$$E_1 - E_0 = \hbar\omega_0$$

$$\omega = \omega_0\left(1 + \frac{gH}{c^2}\right)$$

I mamy ten sam wynik.

Zakrzywienie czasoprzestrzeni.

Próba konstrukcji prostokąta: dwa przedmioty na różnych wysokościach, podążamy za nimi wzdłuż linii światła przez 100s zmierzonych odpowiednio w punktach A i B. Na obu wysokościach czas biegnie inaczej (wyżej czas biegnie szybciej). Po próbie połączenia konturu widzimy że nie zamyka się on → zakrzywienie czasoprzestrzeni.

#### 5.4. Einsteinska teoria ciężenia; efekty fizyczne

Każde ciało porusza się tak, aby poruszający się z nim zegar wykazywał dla toru rzeczywistego dłuższy czas niż wskazywałby on dla jakiegokolwiek innego możliwego toru.

Różnica rytmów pomiędzy poruszającym się i spoczywającym zegarem:

$$\omega = \omega_0\left(1 + \frac{gH}{c^2}\right), \quad \omega - \omega_0 = \frac{\omega_0 gH}{c^2}$$

Ponadto: poprawka o przeciwnym znaku dotycząca STW (poruszający zegar chodzi wolniej)

$$\omega = \omega_0\sqrt{1 - \beta^2}, \quad \text{gdzie } \beta \ll 1$$

$$\omega \approx \omega_0\left(1 - \frac{1}{2}\beta^2\right)$$

$$\omega - \omega_0 = -\frac{1}{2}\beta^2\omega_0$$

A zatem:

$$\Delta\omega = \frac{\omega_0 gH}{c^2} - \frac{1}{2}\beta^2\omega_0$$

$$\omega = \omega_0\left(1 + \frac{gH}{c^2} - \frac{1}{2}\beta^2\right)$$

Spoczywający zegar wskazuje odstęp czasu  $dt \rightarrow$  skutek zmiany rytmu poruszający się zegar zarejestruje czas równy

$$dt\left(1 + \frac{gH}{c^2} - \frac{1}{2}\beta^2\right)$$

Całkowita różnica czasów wzdłuż całego ruchu

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(1 + \frac{gH}{c^2} - \frac{v^2}{c^2}\right) dt = \max \text{ czasu własnego} / \cdot (-mc^2)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{1}{2}mv^2 - mgH\right) = \min$$

$$\int_{t_1}^{t_2} L dt = \min - \text{zasada najmniejszego działania}$$

Prawa teorii grawitacji:

1. W obecności materii zmienia się geometria czasoprzestrzeni.
2. Gdy siły grawitacyjne są jedynymi działającymi siłami to ciała się tak poruszają że czas własny pomiędzy dwoma punktami przyjmuje wartość maksymalną.

## 6. Elementy mechaniki statystycznej

### 6.1. Związek $U$ i $F$ z $\ln Z$ (wyprowadzenie)

Suma statystyczna może posłużyć do wyliczenia wartości oczekiwanej (średnie) dowolnej mikroskopowej wielkości. Tak dla przykładu, średnia mikroskopowa energia  $E$  jest interpretowana jako energia wewnętrzna ( $U$ ) z termodynamiki.

Związek  $Z$  z energią wewnętrzną ( $U$ ):

$$\begin{aligned}U &= \sum_i E_i p_i = \langle E \rangle \\ \langle E \rangle &= \sum_i E_i p_i = \sum_i E_i \frac{1}{Z} e^{-\beta E_i} \\ \langle E \rangle &= -\frac{1}{Z} \sum_i \frac{\partial}{\partial \beta} e^{-\beta E_i} \\ \langle E \rangle &= -\frac{1}{Z} \frac{\partial}{\partial \beta} \sum_i e^{-\beta E_i} \\ \langle E \rangle &= -\frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \beta} \\ \mathbf{U} &= -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln \mathbf{Z}\end{aligned}$$

Związek  $Z$  z energią swobodną ( $F$ ):

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial T} &= \frac{\partial \beta}{\partial T} \frac{\partial}{\partial \beta} = \frac{\partial \frac{1}{k_B T}}{\partial T} \frac{\partial}{\partial \beta} \\ \frac{\partial}{\partial T} &= -\frac{1}{k_B T^2} \frac{\partial}{\partial \beta}, \quad \frac{\partial}{\partial \beta} = -k_B T^2 \frac{\partial}{\partial T} \\ U &= -(-k_B T^2 \frac{\partial}{\partial T}) \ln Z \\ U &= T^2 \frac{\partial}{\partial T} (k_B \ln Z)\end{aligned}$$

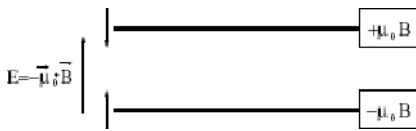
W termodynamice:

$$\begin{aligned}U &= -T^2 \frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{F}{T} \right) \\ k_B \ln Z &= -\left( \frac{F}{T} \right) \\ \mathbf{F} &= -k_B T \ln \mathbf{Z}\end{aligned}$$

### 6.2. Paramagnetyzm, prawo Curie (wyprowadzenie)

Rozważmy szczególnie prosty przypadek, w którym każdy atom ma spin  $\frac{1}{2}$  i związany z nim moment magnetyczny  $\mu_0$ . Może on przyjmować wartość  $\mu_0$  lub  $-\mu_0$ . Dozwolone są tylko 2 orientacje spinu. Substancję taką nazywać będziemy paramagnetykiem. Przypuśćmy, że substancja ta ma w danej chwili określoną temperaturę bezwzględną  $T$ .

Jeden spin:



Rysunek 13. Spin

Prawdopodobieństwo zgodnie z rozkładem kanonicznym wynosi:

$$p_+ = \frac{1}{Z} e^{-\beta E_+}, \quad p_- = \frac{1}{Z} e^{-\beta E_-}$$

Interesuje nas funkcja rozdziału czyli suma po wszystkich stanach (w tym przypadku po dwóch):

$$z = e^{-\beta \mu_0 B} + e^{\beta \mu_0 B}$$

Wstawiamy to do zależności na średnia energię:

$$\bar{E} = -\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta}$$

Rozważmy z drugiej strony wartość średnią momentu magnetycznego:

$$\begin{aligned} \bar{\mu} &\equiv p_+ \mu_+ + p_- \mu_- \\ \bar{\mu} &= \mu_0 \frac{e^{-\beta \mu_0 B} - e^{\beta \mu_0 B}}{e^{-\beta \mu_0 B} + e^{\beta \mu_0 B}} \end{aligned}$$

Gdy  $\omega = \beta \mu_0 B$  to  $\omega = \frac{\text{energia magnetyczna}}{\text{energia termiczna}}$

$$\bar{\mu}_0 = \mu_0 tgh \omega$$

Wartość średnia jest funkcją temperatury (T) i pola (B) :

$$\bar{\mu}_0 = \mu_0 tgh \frac{\mu_0 B}{kT}$$

Średni moment magnetyczny na jednostkę objętości substancji, czyli tzw. namagnesowanie lub magnetyzacja, skierowany jest zgodnie z polem magnetycznym, a jego wielkość  $\bar{M}_0$  jest równa:

$$\bar{M}_0 = N_0 \bar{\mu}_0$$

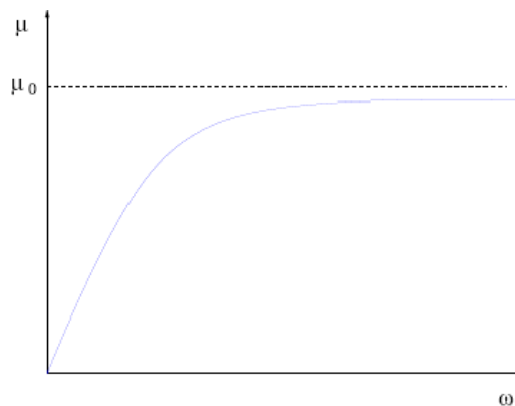
gdzie  $N_0$  - liczba atomów w jednostce objętości.

Wiele Spinów (Prawo Curie):

Jeśli mamy N spinów to :

$$M = \mu N = N \mu_0 tgh \frac{\mu_0 B}{kT}$$

Dla słabych pól ( $\sim$  rzędu 1 Tesli):  $tgh(\omega) \approx \omega$



wykres  $\mu(\omega)$

Rysunek 14. Wykres

$$M = \mu N = N \mu_0 \omega = N \frac{\mu_0^2 B}{kT}$$

podatność magnetyczna:

$$\chi = \frac{\bar{\mu}}{B} = N \frac{\mu_0^2}{kT} \sim \frac{1}{T}$$

Prawo Curie jest bardzo ciekawą i ważną zależnością. Pola muszą być słabe a energia termiczna duża. Zależność tą można zaobserwować tylko dla paramagnetyku. Domeny magnetyczne w ferromagnetyku są makroskopowe. W paramagnetyku wypadkowy moment magnetyczny jest równy 0 (wektory spinów ułożone są losowo dla zerowego pola magnetycznego). Prawo Curie zostało potwierdzone eksperymentalnie. Wykorzystuje się je np. do określenia niskich temperatur. Rozmagnesowanie paramagnetyku pozwala nam na osiągnięcie bardzo niskich temperatur (poniżej 1K). Eksperyment polegał na namagnesowaniu ciała i ochładzania go do niskiej temperatury, następnie po wypompowaniu gazu, wyłączeniu pola – stwierdzono, że układ się oziębził. Stało się tak dlatego, że entropia układu wzrosła i układ obniżył swoją temperaturę.

Dla spinu większego od  $\frac{1}{2}$  mamy do czynienia z większą liczbą stanów kwantowych  $(2s + 1)$ . Analogiczne jak poprzednio obliczenia prowadzą teraz do:

$$\chi = \frac{N}{V} \frac{(g\mu_B)^2}{3} \frac{J(J+1)}{kT} = \frac{const}{T}$$

gdzie:  $\mu_B$ -magneton Bohra,  $J$ -stała wymiany.

## 7. Elementy teorii transportu w rozrzedzonym gazie

### 7.1. Lepkość i transport pędu (schemat wyprowadzenia)

Lepkość, (tarcie wewnętrzne) - właściwość płynów i plastycznych ciał stałych charakteryzująca ich opór wewnętrzny przeciw płynięciu. Zgodnie z laminarnym modelem przepływu lepkość wynika ze zdolności płynu do przekazywania pędu pomiędzy warstwami poruszającymi się z różnymi prędkościami.

$P_{zx}$  - zmiana składowej x pędu cieczy nad płaszczyzną w jednostce czasu, spowodowana transportem pędu przez płaszczyznę.

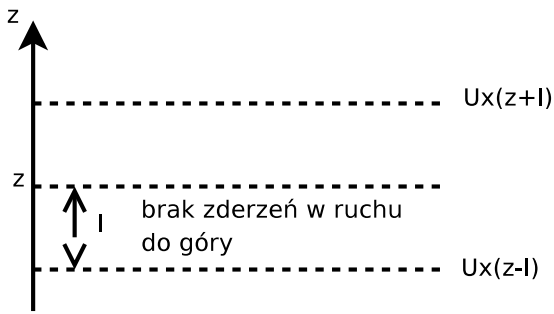
$$P_{zx} = -\mu \frac{\partial U_x}{\partial z}$$

gdzie  $\mu$  - lepkość,  $U_x$  - prędkość cieczy w kierunku  $x$ .

Aby wyprowadzić wzór na  $\mu$  należy założyć dwa przybliżenia:

1. Ruch cząsteczki może odbywać się tylko w trzech kierunkach  $x, y, z$ . Czyli w kierunku  $z$  mamy  $\frac{1}{3}n$ . Następnie liczba cząsteczek przepływająca przez jednostkową powierzchnię w czasie  $dt$  jest równa  $\frac{1}{3}n\bar{v}dt$ .

2. Każda cząsteczka ma taką samą prędkość - prędkość średnią  $v_i = \bar{v}$



Rysunek 15. Ruch cząstek

Przyrost składowej x pędu związany jest z ruchem cząstek do góry w czasie  $dt$  i jest równy:

$$\frac{1}{2} \frac{1}{3} n \bar{v} dt \cdot m U_x(z-l)$$

i jest to składowa x wektora gęstości strumienia pędu.

Ubytek składowej x pędu związany jest z ruchem cząstek na dół w czasie  $dt$  i jest równy:

$$\frac{1}{2} \frac{1}{3} n \bar{v} dt \cdot m U_x(z+l)$$

Teraz dokonujemy bilansu pędu:

$$dp = \frac{1}{6} n \bar{v} dt \cdot m U_x(z-l) - \frac{1}{6} n \bar{v} dt \cdot m U_x(z+l)$$

$$\frac{dp}{dt} = P_{zx}$$

$$P_{zx} = \frac{1}{6} n \bar{v} m [U_x(z-l) - U_x(z+l)]$$

$$U_x(z+l) = U_x(z-l) + 2l \frac{\partial U_x}{\partial z} + (\text{zaniedbujemy})$$

$$P_{zx} = \frac{1}{6} n \bar{v} m \left( -2l \frac{\partial U_x}{\partial z} \right) = -\frac{1}{3} n \bar{v} m l \frac{\partial U_x}{\partial z}$$

$$P_{zx} := -\mu \frac{\partial U_x}{\partial z}$$

I stąd mamy wyprowadzony wzór na lepkość:

$$\mu = \frac{1}{3} l m n \bar{v}$$

Teraz za  $l$  możemy podstawić  $l = \frac{1}{n\sigma}$ , gdzie  $n\sigma$  to gęstość ( $\sigma = \pi d^2$ ,  $d$ -średnica cząsteczki) i mamy:

$$\mu = \frac{1}{3} \bar{v} m \frac{1}{\sigma}$$

a stąd wynika że  $\mu \sim \sqrt{T}$  i nie zależy od  $n$ , również nie zależy od  $p$  ( $pV = nRT$ ,  $T = const$ )

Tekst udostępniany na licencji Creative Commons: Uznanie autorstwa-Użycie niekomercyjne-Na tych samych warunkach 2.5 Polska

(<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/2.5/pl/>).

Wszelakie sugestie, uwagi, poprawki mile widziane :)

Podziękowania dla: Liorithiel, Mizuumi, Tomka