Magdalena Hałucha, Damian Melniczuk
(ankh lub czubek)@student.pwr.wroc.pl
Wersja 1.00

Fizyka 2-sem.

Spis treści

1. Termodynamika

1.1. Równanie stanu gazu doskonałego (schemat wyprowadzenia).

Gaz doskonały spełnia dwa warunki:
1. objętość cząstek gazu jest o wile mniejsza niż objętość zajmowana przez gaz.
2. zasięg siły działającej między dwiema cząsteczkami jest o wiele mniejszy niż średnia odległość międzycząsteczkowa.

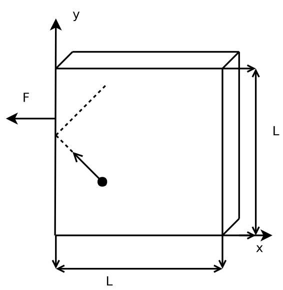
Równanie gazu doskonałego:

$$pV = Nk_BT \tag{1}$$

gdzie p - ciśnienie gazu (siła działająca na jednostkę powierzchni), N - liczba cząstek gazu w objętości V, T - temperatura bezwzględna, k_B - stała Boltzmanna $\frac{R_0}{N_A}$; R_0 - stała gazowa, N_A - stała Avogadra.

Wyprowadzenie kinetyczne równania (1)

Bierzemy sześcian o objętości V. Będziemy rozważać ruch na osi x gdyż na osiach y i z rozważanie to przebiega tak samo



Rysunek 1. Ruch cząsteczki wewnątrz sześcianu o objętości V

$$F = ma$$

$$F_1 = m\frac{\Delta v_x}{\Delta t}$$

Cząsteczka uderza sprężyście o ściankę i zmienia kierunek ruchu "w drugą stronę" (rys. 1).

$$F_1 = m\frac{v_x - (-v_x)}{\Delta t} = \frac{m2v_x}{\Delta t} = \frac{2mv_x}{\frac{2l}{v_x}} = \frac{mv_x^2}{l}$$

$$p_1 = \frac{F_1}{S} = \frac{mv_x^2}{S \cdot l}, p = \sum_i p_i$$

$$p = \sum_i \frac{mv_x^2(i)}{V} = \frac{m}{V}N\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} v_x^2(i)$$

gdzie N oznacza liczbę cząstek. Fragment $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} v_x^2(i)$ oznacza średnią prędkość cząsteczki v_x^2. Więc

$$p = \frac{m}{V}N\overline{v_x^2} \tag{2}$$

Jako, że nie istnieje wyróżniony kierunek: $\overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2}$ ale $\overline{v^2} = \overline{v_x^2} + \overline{v_y^2} + \overline{v_z^2}$ więc $\overline{v_x^2} = \frac{1}{3}\overline{v^2}$.

Ze wzoru (2) wynika:

$$p = \frac{1}{3}\frac{m}{V}N\overline{v^2}$$

$$pV = Nm\frac{1}{3}\overline{v_2}$$

Zdefiniujmy temperaturę T w następujący sposób:

$$T \equiv \left(\frac{2}{3k_B}\right)\frac{m\overline{v^2}}{2} = \left(\frac{2}{3k_B}\right)\overline{K} \tag{3}$$

gdzie $\overline{K}$ jest średnią energią kinetyczną przypadającą na jedną cząsteczkę. Czynnik $\frac{2}{3k_B}$ jest współczynnikiem proporcjonalności.

$$T = \left(\frac{2}{3k_B}\right)\frac{m\overline{v^2}}{2}$$

$$T = \frac{m\overline{v^2}}{3k_B}$$

$$\frac{T3k_B}{m} = \overline{v^2}$$

Po podstawieniu do wzoru 3 otrzymujemy:

$$pV = Nm\frac{1}{3}\frac{T3k_B}{m}$$

Co po uporządkowaniu daje:

$$pV = NTk_B \tag{4}$$

1.2. Pierwsza zasada termodynamiki. Zasada ekwipartycji energii, przykłady. Energia wewnętrzna gazu doskonałego - schemat wyprowadzenia wzoru $\Delta U = c_V dT$.

Pierwsza zasada termodynamiki to prosta zasada zachowania energii, czyli ogólna reguła głosząca, że energia w żadnym procesie nie może pojawić się "znikąd".

$$\Delta U = \Delta Q - \Delta W \tag{5}$$

Gdzie:

ΔU - zmiana energii wewnętrznej układu

ΔQ - ciepło wymienione przez układ z otoczeniem, jeśli układ oddaje ciepło jego energia wewnętrzna maleje

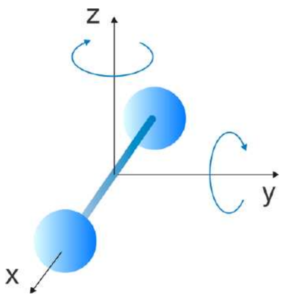
ΔW - praca wykonana przez układ lub nad układem

Inna postać tego prawa:

$$dU = \delta Q - p\Delta V \text{ - dla procesów odwracalnych i nie odwracalnych}$$

1.2.1. Zasada ekwipartycji energii

Na podstawie równania (3) widać, że w równowadze termodynamicznej średnie energie kinetyczne ruchu postępowego wszystkich cząsteczek są równe. Powstaje pytanie czy cząsteczka może gromadzić energię w innej postaci niż energia ruchu postępowego? Odpowiedź jest twierdząca: jeżeli tylko cząsteczka nie ma kształtu kulki (cząsteczka jedno-atomowa), a ma pewną strukturę wewnętrzną to może wirować i drgać. Przykładowo, dwuatomowa cząsteczka w kształcie hantli (rys.2) będzie się obracać po zderzeniu z inną cząsteczką.



Rysunek 2. Dwuatomowa cząstka w kształcie hantli o dwóch rotacyjnych stopniach swobody

Na podstawie mechaniki statystycznej można pokazać, że gdy liczba punktów materialnych jest bardzo duża i obowiązuje mechanika Newtonowska to dostępna energia rozkłada się w równych porcjach na wszystkie niezależne sposoby, w jakie cząsteczka może ją absorbować. Twierdzenie to nosi nazwę zasady ekwipartycji energii.

Każdy z tych sposobów absorpcji energii nazywa się stopniem swobody i jest równy liczbie niezależnych współrzędnych potrzebnych do określenie położenia ciała w przestrzeni. Możemy więc zasadę ekwipartycji energii wyrazić innymi słowami: średnia energia kinetyczna na każdy stopień swobody jest taka sama dla wszystkich cząsteczek.

Na podstawie równania (3) średnia energia kinetyczna ruchu postępowego cząsteczki wynosi

$$\frac{1}{2}m\overline{v^2} = \frac{3}{2}k_BT$$

Odpowiada to trzem stopniom swobody ponieważ potrzebujemy trzech współrzędnych (x, y, z) do określenia położenia środka masy cząsteczki. Stąd średnia energia przypadająca na jeden stopień swobody wynosi $\frac{1}{2}k_BT$ na cząsteczkę.

Dla cząsteczek obracających się potrzeba dodatkowych współrzędnych do opisania ich obrotu więc mamy dodatkowe stopnie swobody. O ile dla N cząsteczek nie obracających się całkowita energia wewnętrzna U jest energią kinetyczną ruchu postępowego

$$U = \frac{3}{2}Nk_BT$$

to dla cząstek wieloatomowych, które mogą obracać się swobodnie we wszystkich trzech kierunkach (wokół osi x, y, z):

$$U = E_{kpost.} + E_{kobr.} = \frac{3}{2}Nk_BT + \frac{3}{2}Nk_BT = 3Nk_BT$$

Natomiast dla cząstki dwuatomowej (hantli pokazanej na rysunku 2):

$$U = E_{kpost.} + E_{kobr.} = \frac{3}{2}Nk_BT + \frac{2}{2}Nk_BT = \frac{5}{2}Nk_BT$$

W tym przypadku mamy tylko dwa rotacyjne stopnie swobody bo moment bezwładności względem osi hantli (oś x) jest znikomo mały.

1.2.2. Energia wewnętrzna gazu doskonałego

Ciepło właściwe substancji definiujemy jako $\frac{dQ}{dT}$ czyli ilość ciepła, którą trzeba dostarczyć do jednostki masy, żeby spowodować jednostkową zmianę jej temperatury.

Gdy masę wyrażamy w kilogramach to mówimy o cieple właściwym wagowym, a gdy wyrażamy ją w molach to mamy do czynienia z molowym ciepłem właściwym.

Ciepło właściwe jednego mola gazu utrzymywanego w stałej objętości oznaczamy c_V. Ponieważ $dV = 0$ więc zgodnie z pierwszą zasadą termodynamiki $dU = dQ$, a stąd

$$c_V = \frac{(dQ)_V}{(dT)_V} = \frac{dU}{dT}$$

gdyż

$$dW = pdV \leftarrow dV = 0$$

Otrzymujemy:

$$dU = c_V dT \tag{6}$$

1.3. Związek między c_p, c_V dla gazu doskonałego (wyprowadzenie).

Kiedy jeden mol utrzymujemy pod stałym ciśnieniem i pozwalamy, aby do gazu dopływało ciepło to wtedy nastąpi wzrost jego objętości, a dodatkowa ilości ciepła $p\Delta V$ zamienia się w pracę mechaniczną.

$$dU = dQ - pdV \Rightarrow dQ = dU + pdV$$

Tylko U zależy od temperatury więc $dU = c_V dT$

$$dQ = c_V dT + pdV \tag{7}$$

Dla gazu doskonałego: $V = \frac{RT}{p}$ i $dV = \frac{R}{p}dT$ Podstawiamy to do (7) i mamy:

$$dQ = c_V dT + p(\frac{R}{p}dT)/dT$$

$$\frac{(dQ)_p}{(dT)_p} = c_V + R$$

co z definicji jest równe c_p czyli

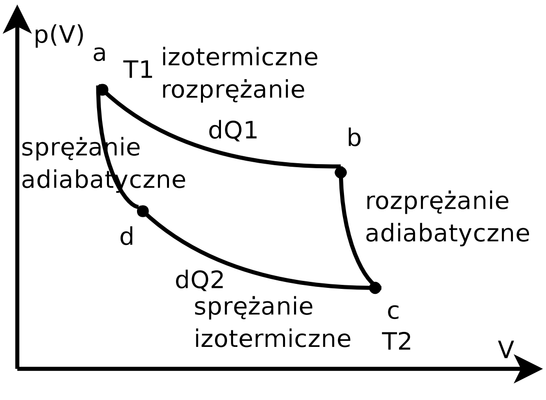
$$c_p - c_V = R \tag{8}$$

dla gazu doskonałego.

1.4. Cykl Carnota i jego sprawność (schemat wyprowadzenia). Druga zasada Termodynamiki.

1.4.1. Schemat wyprowadzenia - cykl Carnota

Silnik Carnota ma największą teoretyczną sprawność spalania wewnętrznego. Nie posiada on żadnych zaworów, a w każdym cyklu jest używany ten sam gaz, ciecz. Źródło energii służy do utrzymywania temperatury T_1 w jednym ze zbiorników ciepła. Drugi zbiornik ma niższą temperaturę T_2.



Rysunek 3. Przemiany w cyklu Carnota

Ze zbiornika o temperaturze T_1 pobierane jest ciepło ΔQ_1. Do zbiornika o temperaturze T_2 dopływa ciepło ΔQ_2. Powierzchnia objęta krzywą jest wykonywaną pracą.

Podczas izotermicznego rozprężania gaz pobiera ciepło ΔQ_1, a podczas izotermicznego sprężania do chłodnicy oddaje mniej ciepła ΔQ_2. $(\Delta Q_2 > 0)$

$\Delta W = \Delta Q_1 - \Delta Q_2$ (pierwsza zasada termodynamiki) ciepło które zostaje utworzone podczas jednego cyklu zamienia się w energię mechaniczną ΔW.

Sprawność μ silnika cieplnego to stosunek energii mechanicznej do ilości pobranego ciepła:

$$\mu = \frac{\Delta W}{\Delta Q_1} = \frac{\Delta Q_1 - \Delta Q_2}{\Delta Q_1} = 1 - \frac{\Delta Q_2}{\Delta Q_1} \tag{9}$$

Następnie korzystając ze wzoru dla gazu doskonałego mamy:

$$\Delta Q_1 = N k_B T_1 ln \tfrac{V_b}{V_a} \text{ (ciepło pobrane)}$$
$$\Delta Q_2 = N k_B T_2 ln \tfrac{V_c}{V_d} \text{ (ciepło oddane)}$$
$$\Downarrow$$

$$\mu = 1 - \frac{T_2 ln \left(\frac{V_c}{V_d}\right)}{T_1 ln \left(\frac{V_b}{V_a}\right)} \tag{10}$$

Następnie z równania stanu możemy obliczyć wartości stosunków objętości:

$$p_a V_a = p_b V_b \text{ rozprężanie izotermiczne}$$
$$p_b {V_b}^{\gamma} = p_c {V_c}^{\gamma} \text{ rozprężanie adiabatyczne}$$
$$p_c V_c = p_d V_d \text{ sprężanie izotermiczne}$$
$$p_d {V_d}^{\gamma} = p_a {V_a}^{\gamma} \text{ sprężanie adiabatyczne}$$

Po przemnożeniu stronami:

$$p_a p_b p_c p_d V_a {V_b}^{\gamma} V_c {V_d}^{\gamma} = p_b p_c p_d p_a V_b {V_c}^{\gamma} V_d {V_a}^{\gamma}$$
$${V_b}^{\gamma-1} {V_d}^{\gamma-1} = {V_c}^{\gamma-1} {V_a}^{\gamma-1}$$

$\frac{V_b}{V_a} = \frac{V_c}{V_d}$ następnie podstawiamy do wzoru (10) i mamy

$$\mu = 1 - \frac{T_2}{T_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \tag{11}$$

co jest sprawnością silnika Carnota.

Przemiany takie jak rozprężenie izotermiczne i adiabatyczne są procesami odwracalnymi, więc cykl Carnota może przebiegać w odwrotnym kierunku. Na przykład w punkcie a rozprężyć gaz adiabatyczne do punktu b, następnie z b do c będzie rozprężenie izotermiczne, c $\rightarrow$ d sprężenie adiabatyczne i d $\rightarrow$ a sprężenie izotermiczne. Wzór jest taki sam gdyż są to procesy odwracalne.

Sprawność odwracalnego cyklu Carnota jest tym większa, im wyższa jest temperatura przekazywana ciepła do systemu (T_1),i im niższa jest temperatura źródła (T_2)

$$\mu_c = 1 - \frac{T_{min}}{T_{max}} \tag{12}$$

Jest to największa sprawność silnika.

1.4.2. Druga zasada termodynamiki

1. Nie można zbudować perpetuum mobile drugiego rodzaju.
2. Gdy dwa ciała o różnych temperaturach znajdują się w kontakcie termicznym, wówczas ciepło będzie przepływało z cieplejszego ciała do chłodniejszego.

3. Żadna cykliczna maszyna cieplna pracująca między temperaturą T_1 (górna) i T_2 (dolna) nie może mieć sprawności większej niż $\frac{(T_1-T_2)}{T_1}$.
4. W układzie zamkniętym entropia nie może maleć. $\Delta S \geqslant 0$

Perpetuum mobile pierwszego rodzaju było by maszyną która pracowała by sama z siebie i cały czas dostarczała by otoczeniu ciepło. Zgodnie z zasadą zachowania energii oznaczało by to, że ma ona w sobie nieskończone źródło energii (gdzie maszyna ta ma skończoną objętość).

Perpetuum mobie drugiego rodzaju nie narusza zasady zachowania energii. Taka maszyna miałaby zamieniać ciepło wewnętrzne w energią mechaniczną. Źródło ciepła cały czas oziębiałoby się w miarę dostarczania otoczeniu energii mechanicznej. Dlatego taką maszynę można by wstawić do oceanu, który pobiera ciepło ze słońca. Jednak z II-giej zasady termodynamiki wynika, że przekształcenie chaotycznego ruchu cieplnego cząstek w uporządkowany ruch maszyny czyli generatora elektrycznego jest niemożliwe. Gdyby istniała maszyna o sprawności większej niż silnik Carnota to wtedy ciepło przepływało by z ciała zimniejszego do cieplejszego, co jest niemożliwe.

1.5. Entropia: definicja termodynamiczna i statystyczna. Zmiana entropii w przemianie izotermicznej (wyprowadzenie).

— Kiedy doprowadzamy do układu ciepło ($Q > 0$) to entropia rośnie ($dS > 0$), jeżeli ciepło jest odprowadzane ($Q < 0$) to entropia maleje ($dS < 0$). Jeżeli entropia układu podlegającego przemianie nie zmienia się ($dS = 0$), to ciepło przemiany jest równe zeru.
— Możliwe jest zmniejszenie entropii ciała i nie narusza to drugiej zasady termodynamiki, gdyż ta zasada odnosi się jedynie do układów zamkniętych.

1.5.1. Definicja entropii

— Definicja termodynamiczna:

$$dS \equiv \frac{(\delta Q)_{odwracalne}}{T} \tag{13}$$

∂Q jest ciepłem dostarczonym do układu podczas procesu odwracalnego (rozprężenia izotermicznego)

— Definicja statystyczna

$$S \equiv k_B \ln \Omega^{(N)} \tag{14}$$

gdzie Ω - liczba stanów, miejsc gdzie może znajdować się cząstka. S - funkcja która zależy od V(początkowa objętość układu).

$$S_N^{(V)} = k_B \ln\left(\frac{V}{V_0}\right) \cdot N$$

gdzie V_0 to objętość cząstki atomu. $S_N^{(V)}$ jest funkcją addytywną do liczby cząstek. Z tego wynika, że jeśli N zwiększy się dwukrotnie to ta funkcja zwiększy się dwukrotnie (N-liczba cząstek).

Względne prawdopodobieństwo znalezienia jednej cząsteczki w objętości V:

$$\Omega^{(1)} = \frac{V}{V_0}, \Omega^{(2)} = \left(\frac{V}{V_0}\right)^2, \Omega^{(N)} = \left(\frac{V}{V_0}\right)^N$$

Przeprowadzamy proces izotermiczny (T=constans):

$$S_N = (V + dV) = k_B N \ln \frac{V + dV}{V_0}$$

$$dS = S_N(V + dV) - S_N(V) = k_B N \ln \frac{V + dV}{V_0} - k_B N \ln \frac{V}{V_0}$$

$$dS = k_B \ln \frac{\frac{V+dV}{V_0}}{\frac{V}{V_0}} = k_B N \ln \frac{V + dV}{V} = k_B N \ln(1 + \frac{dV}{V})$$

$$N >> \frac{V}{V_0}$$

$$dS = k_B N \frac{dV}{V} \tag{15}$$

Wykorzystujemy równanie gazu doskonałego (1):

$$dS = \frac{pV}{T}\frac{dV}{V} = \frac{pdV}{T}$$

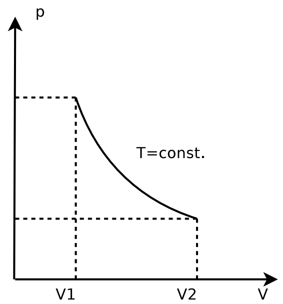
Z pierwszej zasady termodynamiki otrzymujemy:

$$dV = 0 = \delta Q - \delta W$$

$$\delta Q = pdV$$

$$dS = \frac{\delta Q}{T}$$

1.5.2. Zmiana entropii w przemianie izotermicznej



Rysunek 4. Diagram przemiany izotermicznej

$$\Delta S = \sum_i dS_i = \sum_i \frac{(\delta Q)_i}{T_i}; T_i = T$$

$$\Delta S = \frac{1}{T} \sum_i (\delta Q)_i = \frac{1}{T} \Delta Q$$

$(\partial Q)_i$ to wymienione ciepło w przemianie izotermicznej.

Całkowita zmiana entropii w tym procesie jest równa sumie nieskończenie małych zmian entropii, a $dS = \frac{\delta Q}{T}$ więc $dS_i = \frac{(\delta Q)_i}{T_i}$ ale w tym procesie T jest wszędzie stałe wiec $T_1 = T$

W procesie izotermicznym $\Delta W = \Delta Q$

$$\Delta W = \Delta Q = N k_b T \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right)$$

gdzie V_1 - objętość początkowa układu, V_2 - objętość końcowa układu.

$\Delta Q = N k_b T \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right)$ - izotermiczne rozprężanie gazu doskonałego czyli, że $(p_1, V_1, T) \rightarrow (p_2, V_2, T)$

Oznacza to też, że entropia nie zależy od drogi.

$$\Delta S = N k_B \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right) \tag{16}$$

1.6. Funkcje stanu w termodynamice. Relacje Maxwella (schemat wyprowadzenia - rotacja, przykłady).

1.6.1. Funkcje stanu

Potencjały termodynamiczne to wielkości fizyczne związane z układem termodynamicznym mające wymiar energii. Nazywane są "potencjałami", ponieważ są odpowiednikami energii potencjalnej w mechanice. Cztery najczęściej używane potencjały termodynamiczne określone są dla złożonych stałych, nie zmieniających się par parametrów przemiany termodynamicznej: (S, V) lub (T, V) lub (S, p) lub (T, p)

Funkcja stanu to w termodynamice funkcja zależna wyłącznie od stanu układu, czyli od aktualnych wartości jego parametrów, takich jak masa, liczność materii, temperatura, ciśnienie, objętość i inne. Wartość funkcji stanu z definicji nie zależy od jego historii, tzn. tego co działo się z nim wcześniej. Jeśli udowodni się, że jakaś funkcja termodynamiczna jest zależna od historii układu, to wówczas nie jest to funkcja stanu, a funkcja procesu. Wynika z tego że: zmiana wartości funkcji stanu zależy tylko od stanu początkowego i końcowego, a nie od sposobu w jaki ta zmiana została zrealizowana.

Funkcje stanu:
— objętość właściwa (V) (jest odwrotną gęstości)
— energia wewnętrzna (U) (suma energii oddziaływań międzycząsteczkowych i wewnątrzcząsteczkowych układu oraz energii ruchu cieplnego cząsteczek)
— entropia (S)
— energia swobodna $F = U - TS$ (energia która może być w danym procesie uwolniona na zewnątrz układu)
— entalpia $H = U + pV$ (umowna energia zgromadzona w czynniku termodynamicznym, którą można zamienić na inną postać energii lub na odwrót)
— entalpia swobodna (energia swobodna Gibbsa) $G = U - TS + pV$ (U energia wewnątrz układu)

1.6.2. Relacje Maxwella

Rotacja:

$$\partial F(x, y) = X_{(x,y)}dx + Y_{(x,y)}dy$$

$$\partial F(x, y) = \vec{F} \cdot d\vec{r} = [X, Y] \cdot [dx, dy], \text{ trzecia składowa jest zawsze równa 0 więc}$$

$$\partial F(x, y) = [X, Y, 0][dx, dy, 0]$$

Żeby $\int\limits_C \partial F(x, y) = \int\limits_C \vec{F} \cdot \vec{r}$ nie zależało od drogi (C) to $\text{rot}\vec{F} = 0$ (co gwarantuje niezależność od drogi).

$$\text{rot } \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ X_{(x,y)} & Y_{(x,y)} & 0 \end{vmatrix} = \hat{i}0 - \hat{j}0 + \hat{k}\left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right)$$

$$rot\vec{F} = 0 \text{ gdy } \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right) = 0 \tag{17}$$

Wówczas: $\partial F(x,y) \to dF(x,y)$ (różniczka zupełna)
$\int\limits_C dF(x,y) = F(B) - F(A)$ - nie zależy od drogi
Przykłady:
— $dU = \partial Q - pdV = TdS + (-p)dV$

$$\frac{\partial T}{\partial V} = -\frac{\partial p}{\partial S}$$

— relacja wynikająca z entropii S

$$TdS = dU + pdV$$

$$dS = \frac{1}{T}dU + \frac{p}{T}dV$$

2. Elementy statyki i dynamiki płynów. Fale w ośrodkach sprężystych.

2.1. Ciśnienie, prawa Pascala i Archimedesa, fala biegnąca, liczba falowa, długość fali, prędkość fazowa i grupowa, fala stojąca i rezonans.

2.1.1. Ciśnienie

Ciśnienie, p - skalarna wielkość fizyczna charakteryzująca stan naprężenia w danym punkcie ośrodka płynnego. Jest równy stosunkowi wartości siły F działającej prostopadle na powierzchnię do jej pola powierzchni S:

$$p = \frac{F}{S} \tag{18}$$

2.1.2. Prawo Pascala

Płyn (ciecz, ciało lotne) w zamkniętym naczyniu przekazuje wywierane na nie ciśnienie zewnętrzne jednakowo we wszystkich miejscach i kierunkach, a siła parcia nim wywołana jest zawsze prostopadła do powierzchni na którą działa ($F_{parcia} = p \cdot S$).

2.1.3. Prawo Archimedesa

Na każde ciało zanurzone w płynie działa siła wyporu $\vec{F_w}$ skierowana pionowo do góry i co do wartości równa ciężarowi płynu (cieczy lub gazu) wypartego przez to ciało:

$$F_w = \rho_p g V_c,$$

gdzie ρ_p - gęstość płynu, g - przyspieszenie ziemskie, V_c - objętość płynu wypartego przez ciało (objętość ciała lub jego część zanurzonej w płynie).

2.1.4. Fala biegnąca

Fale wytworzone przez siłę wymuszoną działająca na ośrodek otwarty nazywamy falami biegnącymi. Wędrują one od źródła, które je wytworzyło w nieskończoność, towarzyszy im transport energii i pędu.

2.1.5. Liczba falowa

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

2.1.6. Długość fali

λ - najmniejsza odległość pomiędzy dwoma punktami drgającego ośrodka, których wychylenia i (wektory) prędkości są takie same oraz mają różniącą się o 2π fazę w ustalonej chwili czasu.

2.1.7. Prędkość fazowa i grupowa

— Prędkość fazowa fal poprzecznych biegnących wzdłuż struny

$$v = \frac{\omega}{k}$$

gdzie F - siła naciągu struny, S - pole poprzeczne przekroju struny, ρ - gęstość materiału struny.

— Prędkość grupowa to prędkość transportu energii przez falę niesinusoidalną

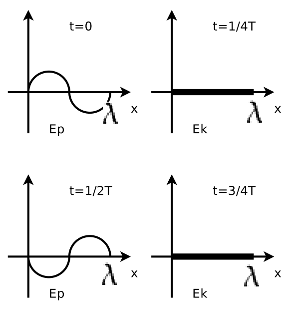
$$u = v - \lambda \cdot \frac{dv}{d\lambda}$$

gdzie u - prędkość grupowa fali, v - prędkość fazowa, λ - długość fali, $\frac{dv}{d\lambda}$ - współczynnik dyspersji ośrodka (zależność prędkości fazowej fal od ich częstotliwości).

2.1.8. Fala stojąca

Fala stojąca - fala powstająca w wyniku interferencji dwóch fal o jednakowych długościach biegnących w przeciwne strony. Cechą charakterystyczną fali stojącej jest to, że amplituda drgań dla dwóch różnych cząstek ośrodka zależy od punktu ośrodka. Fale stojące mogą być jednowymiarowe (np. drgająca struna), dwuwymiarowe (membrana) lub trójwymiarowe.

$$y_1 = \sin(kx - \omega t)$$
$$y_2 = \sin(kx + \omega t)$$
$$y_1 + y_2 = 2\sin(kx)\cos(\omega t)$$



Rysunek 5. Fala stojąca

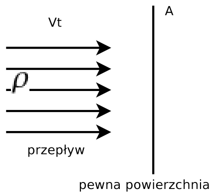
Energia fali biegnącej jest zachowana w każdym punkcie.

2.1.9. Rezonans

Rezonans - drgania o dużej amplitudzie spowodowane równością częstości siły wymuszającej i jednej z częstości drgań własnych układu.

2.2. Równanie ciągłości (schemat wyprowadzenia).

Najpierw musimy zdefiniować co to jest gęstość strumienia masy i wektor gęstości strumienia masy.



$$j \equiv \frac{m}{A \cdot t} \text{ - gęstość strumienia masy} \tag{19}$$

$$m = V\rho \Rightarrow V = Avt \Rightarrow m = Avt\rho$$

Po podstawieniu do (19) otrzymujemy:

$$\vec{j} = \rho\vec{v} \tag{20}$$

gdzie v - lokalna prędkość małego kawałeczka

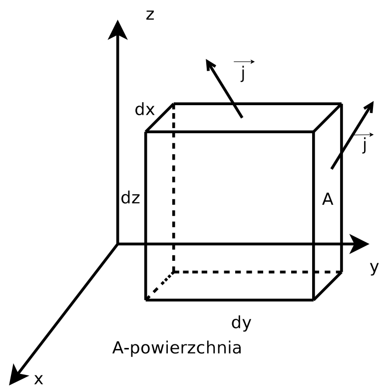
Następnie masa jaka przepływa w jednostce czasu:

$$dm = \vec{j} \cdot d\vec{A}$$

gdzie $d\vec{A}$ jest to wektor prostopadły do danej powierzchni, czyli przepływ masy jest równy

$$dm = \vec{j} \cdot d\vec{A} \cdot dt \tag{21}$$

Wyprowadzenie:



Rozpatrujemy przepływ wzdłuż kierunku y:

$$dm_r = \vec{j}_r \cdot d\vec{A}_r \cdot dt$$

$$dm_l = \vec{j}_l \cdot d\vec{A}_l \cdot dt$$

gdzie dm_r - masa przepływajaca przez prawą ścianę, a dm_l - masa przepływająca przez lewą ścianę. $d\vec{A}_r \rightarrow$ skierowany jest na zewnątrz gdy mamy powierzchnię zamkniętą (umownie)

$$d\vec{A}_r = \hat{j}dzdx$$

$$dm_r = \vec{j}(y + dy) \cdot d\vec{A}_r \cdot dt = j_y(y + dy)dzdxdt$$

$$\text{bo } \vec{d} \cdot \hat{j} = d_y \text{ ; } (d_x, d_y, d_z) \cdot (0, 1, 0) = d_y$$

$$dm_l = \vec{j}(y) \cdot d\vec{A}_l \cdot dt = \vec{j}(y)dzdx(-\hat{j})dt$$

$$dm_l = -\vec{j}_y(y)dzdxdt$$

Teraz przeprowadzamy bilans wzdłuż tego kierunku:

$$dm_y = \vec{j}_y(y + dy)dzdxdt - \vec{j}_y(y)dzdxdt$$

$$dm_y = (\vec{j}_y(y+dy) - \vec{j}_y(y))dxdzdt$$
$$dm_y = \frac{\partial j_y}{\partial y} dxdydzdt$$
$$dm_y = \frac{\partial j_y}{\partial y} dVdt \tag{22}$$

Podobnie jest wzdłuż kierunków x i z. Zatem całkowity przepływ przez powierzchnię jest równy:

$$dm_s = dm_x + dm_y + dm_z = dVdt\left(\frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z}\right) \tag{23}$$

$$\frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z} = div\vec{j}$$

Czyli otrzymujemy:

$$dm_s = div\vec{j} \cdot dVdt \tag{24}$$

Następnie z prawa zachowania masy mamy:

$$|dm_V| = |dm_S|$$

gdzie dm_V - zmiana masy w objętości, dm_S - masa przepływająca przez powierzchnię.

$$dm_S > 0,\ dm_V < 0 \text{ - wypływ masy}$$
$$dm_V + dm_S = 0 \tag{25}$$
$$dm_V = \frac{\partial \rho}{\partial t} dtdV$$
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} dtdV + div\vec{j}dVdt = 0$$

Równanie ciągłości wygląda więc:

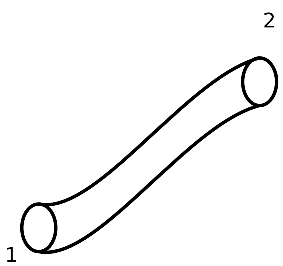
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div\vec{j} = 0 \tag{26}$$

2.3. Równanie Bernoulliego (schemat wyprowadzenia); przykłady.

$$p + \frac{1}{2}\rho V^2 + \rho\varphi = constans \tag{27}$$

gdzie p - ciśnienie, V - prędkość przepływu cieczy w danym punkcie i φ - energia potencjalna na jednostkę masy.

$\vec{V}(\vec{r})$ - ruch ustalony, prędkość nie zależy od czasu.



$$W = \Delta E_k + \Delta E_p + \Delta E_{wewntrzne}$$
$$W_1 - W_2 = -dME_1 + dME_2 \tag{28}$$

gdzie: $W_1 = p_1A_1V_1dt$ $W_2 = p_2A_2V_2dt$ E_1, E_2 - energia na jednostkę masy

$$E = \frac{1}{2}V^2 + \varphi + E_{wewntrzne} \tag{29}$$

Teraz korzystamy ze wzoru (28) i mamy:

$$p_1 A_1 V_1 dt - p_2 A_2 V_2 dt = -dME_1 + dME_2$$

$$\frac{V_1 p_1 A_1 dt}{dM} - \frac{V_2 p_2 A_2 dt}{dM} = E_2 - E_1$$

gdzie odpowiednio $dM = A_1 V_1 dt \rho_1$, $dM = A_2 V_2 dt \rho_2$

$$\frac{p_1}{\rho_1} - \frac{p_2}{\rho_2} = E_2 - E_1$$

Teraz po skorzystaniu ze wzoru (29) otrzymujemy:

$$\frac{p_1}{\rho_1} + \frac{1}{2}V_1^2 + \varphi_1 + E_{wewn(1)} = \frac{p_2}{\rho_2} + \frac{1}{2}V_2^2 + \varphi_2 + E_{wewn(2)}$$

$$\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}V^2 + \varphi + E_{wewn} = constans$$

i jest to ustalony przepływ wzdłuż linii prądu. Następnie zakładamy:
— zaniedbujemy zmiany energii wewnętrznej (brak lepkości)
— brak wirów

$$\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}V^2 + \varphi = constans$$

i na końcu zakładamy jeszcze, że ciecz ta jest nieściśliwa czyli, że φ jest stałą

$$p + \frac{1}{2}\rho V^2 + \rho\varphi = constans$$

(równanie Bernoulliego)

Przykłady:

1. kartki papieru (rys.6 A) $p_1 + \frac{1}{2}\rho V_1^2 + \rho\varphi = p_2 + \frac{1}{2}\rho V_2^2 + \rho\varphi$

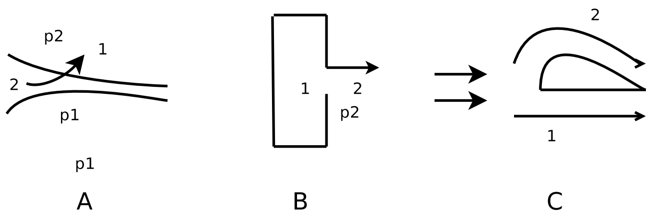
$$p_1 > p_2$$

2. rozbita szyba (rys.6 B) $p_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho V_2^2$

$$p_1 > p_2$$

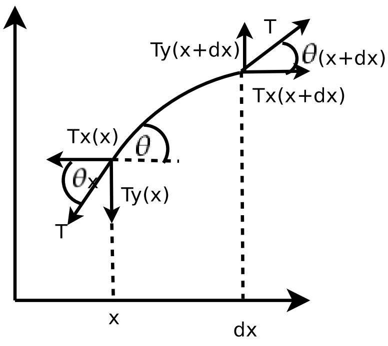
3. ciągłość strugi (rys.6 C) $V_1 < V_2 \Rightarrow p_1 + \frac{1}{2}\rho V_1^2 = p_2 \frac{1}{2}\rho V_2^2$

$$p_2 < p_1$$



Rysunek 6. Przykłady: A - kartki papieru, B - rozbita szyba, C - ciągłość strugi

2.4. Równanie falowe dla naprężonej struny (schemat wyprowadzenia).



1.

$$T_x = T\cos\theta \approx (1 - \frac{\theta^2}{2})T$$

$$T_x \approx T$$

$$T_x(x) \approx T_x(x+dx) \approx T$$

$$T_y = T\sin\theta$$

$$T_y = T_y(x+dx) - T_y(x) = T\sin\theta(x+dx) - T\sin\theta(x) \approx T\theta(x+dy) - T\theta(x)$$

$$T_y = T(\theta(x+dx) - \theta(x)) = T\frac{\partial\theta}{\partial x}dx$$

$$\theta \simeq \operatorname{tg}\theta \text{ ponieważ są to małe kąty}$$

$$T_y = T\frac{\partial}{\partial x}\operatorname{tg}\theta dx$$

$$y = y(x,t)$$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\partial y}{\partial x}$$

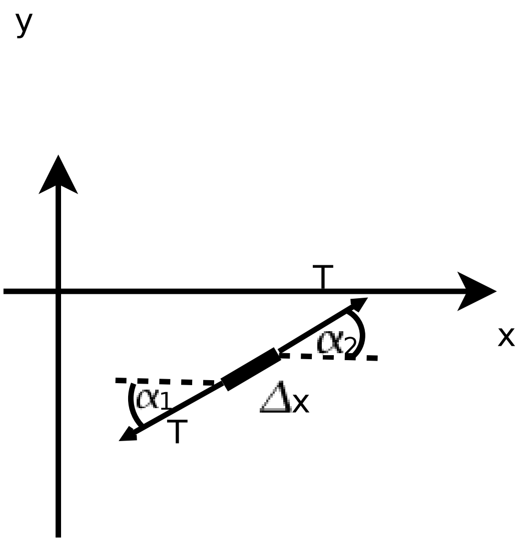
$$T_y = T\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}dx$$

Następnie z drugiej zasady dynamiki Newtona otrzymujemy:

$$T_y = T\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}dx = (\mu dx)\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\mu}{T}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \tag{30}$$

2. Bierzemy mały wycinek struny od długości Δx, którego końce tworzą małe kąty α_1, α_2 z osią x. Małe to takie, dla których $\sin\alpha \approx \alpha \approx \frac{\partial y}{\partial x}$



Wypadkowa pionowa siła działająca na strunę wynosi: $F_{wyp.} = (T\alpha_2 - T\alpha_1)$. Musi ona być równa iloczynowi masy $(\mu\Delta x)$ i pionowego przyspieszenia $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$. Stąd:

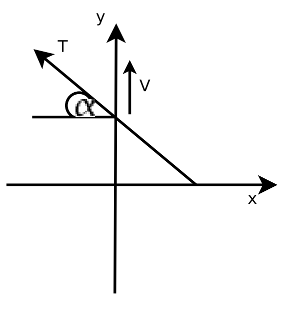
$$F_{wyp.} = (T\alpha_2 - T\alpha_1) = (\mu\Delta x)\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$$T\frac{\Delta\alpha}{\Delta x} = \mu\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial\alpha}{\partial x} = \frac{\mu\partial^2 y}{T\partial t_2} \text{ Podstawmy teraz } \alpha = \frac{\partial y}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\mu\partial^2 y}{T\partial t^2} \tag{31}$$

2.5. Moc w ruchu falowym (schemat wyprowadzenia).



Koniec struny pociągamy do góry co powoduje, że po strunie rozchodzi się fala. Następnie wykorzystujemy związek że $P = \frac{dW}{dt} = T_y v_y$

$$P = T_y v_y = T_y(\frac{\partial y}{\partial t})\sin\alpha$$

i tutaj również skorzystaliśmy z tego, że $v = \frac{\partial y}{\partial t}$. Ponieważ α jest małe, to $\sin\alpha \approx -\frac{\partial y}{\partial x}$ więc

$$P = -T(\frac{\partial y}{\partial t})(\frac{\partial y}{\partial x})$$

Szczególny przypadek (fala sinusoidalna):

$$y(x,t) = A\sin(kx - \omega t)$$

$$P = TA^2 k\omega\cos^2(kx - \omega t)$$

$$v = \frac{\omega}{k} \Rightarrow k = \frac{\omega}{v}$$

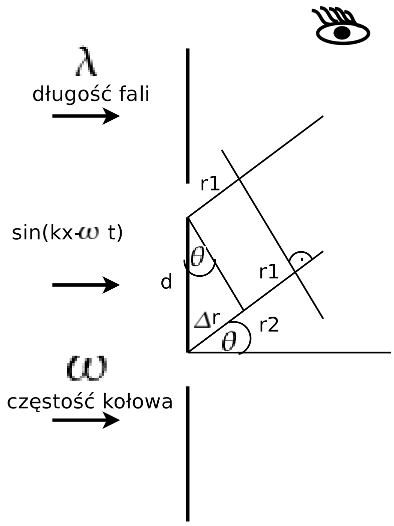
$$P = TA^2\frac{\omega^2}{v}\cos^2(kx-\omega t)$$

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \text{ gdzie } \mu \text{ -masa na jednostkę długości}$$

$$P = A^2\omega^2 T\sqrt{\frac{\mu}{T}}\cos^2(kx-\omega t)$$

$$P = \sqrt{\mu T}A^2\omega^2\cos^2(kx-\omega t) \tag{32}$$

2.6. Interferencja fal: układ dwóch szczelin (schemat wyprowadzenia).



Rysunek 7. Układ dwóch szczelin

$$\Delta r = d\sin\theta$$

Równania fali:

$$y_1 = A\sin(kr_1 - \omega t)$$

$$y_2 = A\sin(kr_2 - \omega t)$$

Następnie korzystając z zasady superpozycji mamy:

$$y_1 + y_2 = 2A\sin(\frac{k(r_1+r_2)}{2} + \omega t)\cos\frac{k(r_2+r_1)}{2}$$

gdzie: $r_2 - r_1 = d\sin\theta \Rightarrow \cos\frac{kd\sin\theta}{2}$

Średnia moc w ruchu falowym jest równa :

$$\overline{P} \sim \cos^2\frac{kd\sin\theta}{2} \tag{33}$$

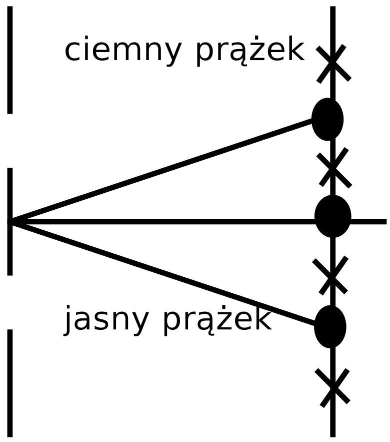
$$\cos x = \pm 1 \Rightarrow x = n\pi;\text{ gdzie n=1,2,3,...}$$

Korzystając ze wzoru (33) otrzymujemy:

$$\frac{kd\sin\theta}{2} \Rightarrow \frac{\frac{2\pi}{\lambda}d\sin\theta}{2} = n\pi;\ \text{gdyż}\ k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\frac{d}{\lambda}\sin\theta = n$$

$$\sin\theta = n\frac{\lambda}{d} \tag{34}$$



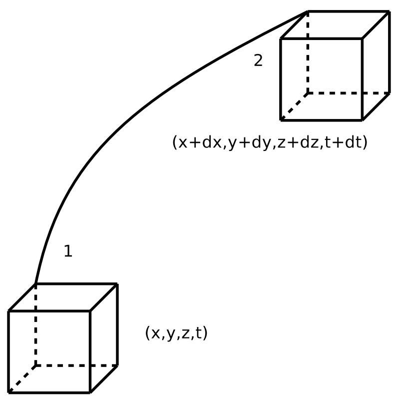
Rysunek 8. Jasne i ciemne prążki interferencyjne

$\lambda \sim d$: granica widzenia prążków interferencyjnych więcej niż jednego rzędu (granica dyfrakcyjna).

2.7. Równanie Eulera.

Siła na jednostę objętości: $\vec{f} = -gradp$

$$\rho\frac{d\vec{v}}{dt} = -gradp$$



Opisuję teraz zmianę prędkości cząstki:

$$d\vec{v}_{czst.} = \vec{v}(x+dx, y+dy, z+dz, t+dt) - \vec{v}(x,y,z,t)$$

Następnie abyśmy byli pewni, że cząstka dochodzi do punktu 2 musi zachodzić:

$$v_x = \frac{dx}{dt}\ v_y = \frac{dy}{dt}\ v_z = \frac{dz}{dt}$$

gdzie V_x-rzeczywista prędkość cząstki; d_x, d_y, d_z-różnica położeń między punktem pierwszym a drugim; $\frac{d_x}{d_t}$,$\frac{d_y}{d_t}$, $\frac{d_z}{d_t}$-iloraz dwuch dowolnych liczb

$$d\vec{v}_{cz} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial x}dx + \frac{\partial\vec{v}}{\partial y}dy + \frac{\partial\vec{v}}{\partial z}dz + \frac{\partial\vec{v}}{\partial t}dt$$

$$d\vec{v}_{cz} = dt\left|\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \frac{\partial\vec{v}}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial\vec{v}}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt} + \frac{\partial\vec{v}}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dt}\right|$$

$$\frac{d\vec{v}_{cz}}{dt} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + v_x\frac{\partial\vec{v}}{\partial x} + v_y\frac{\partial\vec{v}}{\partial y} + v_z\frac{\partial\vec{v}}{\partial z}$$

$$(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v}$$

$$\frac{d\vec{v}_{cz}}{dt} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v}$$

gdzie: $\frac{d\vec{v}_{cz}}{dt}$ - zmiana prędkości rzeczywistej cząstki, $\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}$ - zmiana prędkości cząstek przepływających przez dany punkt, $(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v}$ - przesunięcie w danej chwili czasu z jednego punktu do drugiego

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v} = -\frac{grad}{\rho} \tag{35}$$

dla cieczy idealnej(brak tarcia i transportu ciepła)

Wszelakie sugestie, uwagi, poprawki mile widziane :)

Podziękowania dla: Liorithiel, Mizuumi